Corrigé de devoir non surveillé

Fonctions absolument monotones

Partie A – Généralités

A.1 Soit f une application absolument monotone. En particulier, f et f' sont positives, et l'application f est donc $\boxed{\text{positive et croissante}}$.

La fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ est $\boxed{\text{décroissante et absolument monotone}}$.

A.2 Pour tout entier naturel n,

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \qquad \text{et} \qquad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)},$$

donc $\boxed{f+g \text{ et } fg \text{ sont absolument monotones}}$.

A.3 Soit f une application absolument monotone. Tout d'abord, e^f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a,b[$.

Pour tout entier naturel n, on formule l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$ suivante : pour tout entier $j \in [\![0,n]\!]$, $(e^f)^{(j)} \geqslant 0$.

L'amorçage en $n=0$ est aisé.

Fixons $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}_n$ et déduisons-en $\mathcal{H}_{n+1}$. On a

$$(e^f)^{(n+1)} = \left((e^f)'\right)^{(n)} = \left(f'e^f\right)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(n-j+1)} (e^f)^{(j)}$$

On déduit donc bien $\mathcal{H}_{n+1}$ de $\mathcal{H}_n$ (et de l'absolue monotonie de f) : l'hérédité est prouvée.

$\boxed{e^f \text{ est donc absolument monotone.}}$

Partie B – La fonction arcsinus est absolument monotone sur $]0,1[$

B.1

a L'application g est indéfiniment dérivable, et une récurrence immédiate montre que pour tout entier naturel n, tout $x \in]0,1[$,

$$g^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + (-1)^{n+1}\frac{1}{(1+x)^{n+1}}\right).$$

b Pour tout $x \in]0,1[$, $0 < 1-x < 1+x$, donc $0 < \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1-x}$, puis, pour tout entier naturel n, $0 < \frac{1}{(1+x)^{n+1}} < \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$, et $\boxed{g \text{ est donc absolument monotone sur }]0,1[}$.

B.2 Comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut considérer $h = \ln(f)$, qui est également de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout $x \in]0,1[$,

$$h(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{1}{2}\left(\ln(1-x) + \ln(1+x)\right).$$

On constate donc que $h' = g$: h est positive, et de dérivée absolument monotone, donc h est absolument monotone. D'après A.3, $\boxed{f (= e^h) \text{ est absolument monotone}}$.

B.3 L'application arcsinus sur $]0,1[$ est positive, et de dérivée f absolument monotone :

$\boxed{\text{l'application arcsinus sur }]0,1[\text{ est absolument monotone.}}$

Partie C – Prolongement d'une application absolument monotone

C.1 f est croissante et majorée (car positive), donc admet une limite finie (positive ou nulle) en a : f est prolongeable par continuité en a. Ce raisonnement s'applique aussi à f', qui admet donc une limite finie positive ou nulle en a. Par conséquent, $\boxed{\text{le prolongement } \tilde{f} \text{ est dérivable (de dérivée continue) en } a}$.

C.2 Soit n un entier naturel n. Le raisonnement ci-dessus, appliqué à $f^{(n)}$ (qui est absolument monotone), montre que $f^{(n)}$ admet une limite finie positive ou nulle en a, ainsi que sa dérivée. $\tilde{f}$ est donc dérivable à tout ordre en a, et ses dérivées y sont positives ou nulles. Comme par ailleurs f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a,b[$, on a le résultat voulu :

$\boxed{\tilde{f} \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } [a,b[\text{, et toutes ses dérivées sont positives ou nulles en } a.}$

C.3 Il suffit de considérer l'application f définie en B.2 pour constater que, même dans le cas où b est fini, $\boxed{f \text{ n'est pas nécessairement prolongeable par continuité en } b}$.

Partie D – Une caractérisation des applications absolument monotones

D.1 Pour tous $f, g \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tout réel x, on a :

$$T_h(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda f + \mu g)(x+h) = \lambda f(x+h) + \mu g(x+h) = (\lambda T_h(f) + \mu T_h(g))(x).$$

T_h est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. Comme $\Delta_h = T_h - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$, Δ_h est également un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^\mathbb{R})$.

On a $T_h \circ T_{-h} = T_{-h} \circ T_h = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$, donc $\boxed{T_h \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^\mathbb{R})}$.

Comme toute fonction constante sur $\mathbb{R}$ appartient au noyau de Δ_h, cet endomorphisme n'est pas injectif :

$\boxed{\Delta_h \text{ est un endomorphisme non injectif de } \mathbb{R}^\mathbb{R}.}$

D.2 $\boxed{\Delta_h^2(f)(x) = (T_h^2 - 2T_h + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^\mathbb{R}})(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).}$

D.3 On peut prouver la formule comme vous l'avez fait (par récurrence), mais aussi grâce à la formule du binôme de Newton. En effet, dans l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$, les endomorphismes T_h et $-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$ commutent, et donc

$$(T_h - Id_{\mathbb{R}^\mathbb{R}})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^\mathbb{R}})^{n-k} T_h^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} T_{kh},$$

relation dont on déduit le résultat :

$\boxed{\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh).}$

D.4

a Soit $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente,

$$X'_{n+1}(h) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} k f'(x+kh)$$

Comme $k\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k-1}$ pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, on a :

$$X'_{n+1}(h) = (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n-(k-1)} \binom{n}{k-1} f'(x+kh) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f'(x+h+kh)$$

Ainsi, d'après D.3,

$\boxed{X'_{n+1}(h) = (n+1)\Delta_h^n(f')(x+h).}$

b Supposons $\Delta_h^n(f') \geqslant 0$. D'après la question précédente, X_{n+1} est donc croissante. Comme elle est de limite nulle en 0, elle est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc $\Delta_h^{n+1}(f)(x) \geqslant 0$. Ceci étant valable pour tout réel x, $\boxed{\Delta_h^{n+1}(f) \geqslant 0}$.

c Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on formule l'hypothèse de récurrence : pour toute fonction absolument monotone f, $\Delta_h^n(f) \geqslant 0$.

Cette récurrence s'amorce sans problème en $n = 0$, et la question précédente en montre l'hérédité.

Par conséquent, $\boxed{\text{toute fonction absolument monotone est totalement monotone}}$.

D.5

a Soit f une application totalement monotone. En particulier, $\Delta_1^0(f) \geqslant 0$, *i.e.* $f \geqslant 0$.

De plus, soit x et y deux réels quelconques vérifiant $x < y$. On a :

$$f(y) - f(x) = \Delta_{y-x}(f)(x) \geqslant 0.$$

$\boxed{\text{Toute fonction totalement monotone est donc positive et croissante.}}$

b On remarque que $\boxed{\psi_n' - n\psi_n - n\psi_{n-1}}$ est une combinaison linéaire non triviale à résultat nul de la famille $(\psi_n', \psi_n, \psi_{n-1})$.

c On peut montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, et tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\psi_n^{(k)} - \frac{n!}{(n-k)!}\psi_{n-k} \in \mathrm{Vect}(\psi_n, \dots, \psi_{n-k+1})$. Comme $\psi_j(0) = 0$ pour tout entier $j \geqslant 1$ et $\psi_0(0) = 1$, on en déduit que pour tout entier naturel n, $\boxed{\psi_n^{(k)}(0) = 0 \text{ si } 0 \leqslant k < n, \text{ et que } \psi_n^{(n)}(0) = n!}$.

d La formule du binôme de Newton donne, pour tout entier naturel n et tout réel t :

$$\psi_n(t) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} (e^t)^k (-1)^{n-k} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} e^{kt}.$$

En dérivant cette relation j fois ($j \in [\![0, n]\!]$), on obtient, pour tout réel t :

$$\psi_n^{(j)}(t) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^j e^{kt}.$$

En évaluant cette relation en 0, et en tenant compte de la question précédente, on a bien le résultat :
$\boxed{S_j \text{ vaut } 0 \text{ si } 0 \leqslant j < n, \text{ et } S_n \text{ vaut } n!.}$

e La formule de Taylor-Lagrange permet d'affirmer l'existence, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, de $y_k \in]x, x + kh[$, tel que :

$$f(x + kh) = \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(kh)^j}{j!} f^{(j)}(x) \right) + \frac{(kh)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(y_k).$$

Cette formule reste valable pour $k = 0$ en posant par exemple $y_0 = x$.

D'après la formule de D.3, on a :

$$\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(kh)^j}{j!} f^{(j)}(x) \right) + \frac{(kh)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(y_k) \right)$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(x) \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^j \right) \right) + h^{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(y_k) \right),$$

$$= h^n f^{(n)}(x) + h^{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(y_k) \right), \quad \text{(d'après D.5.d)}$$

En divisant par h^n, et en faisant tendre h vers 0, on obtient

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\Delta_h^n(f)(x)}{h^n},$$

et donc $f^{(n)}(x) \geqslant 0$. Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, f est absolument monotone.

$\boxed{\text{Toute application totalement monotone est absolument monotone.}}$