

Devoir non surveillé

Sur les applications

1 Soit

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{P}(E) &\rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X &\mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{aligned}$$

a Que vaut $\Phi(\emptyset)$? $\Phi(E)$? $\Phi(A \cup B)$?

b Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que Φ soit injective.

c Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que Φ soit surjective.

2 Soit f une application de E dans F . Établir l'équivalence des assertions suivantes :

1. f est surjective;
2. $\forall y \in F, f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$;
3. $\forall Y \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(Y)) = Y$;
4. $\forall Y \in \mathcal{P}(F), (f^{-1}(Y) = \emptyset) \Rightarrow (Y = \emptyset)$.

3 Soit $f : E \rightarrow F$ une application,

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{P}(E) &\rightarrow \mathcal{P}(F) \\ A &\mapsto f(A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{P}(F) &\rightarrow \mathcal{P}(E) \\ B &\mapsto f^{-1}(B) \end{aligned}$$

a Montrer que f est injective si et seulement si Φ est injective si et seulement si Ψ est surjective.

b Montrer que f est surjective si et seulement si Φ est surjective si et seulement si Ψ est injective.