Corrigé de devoir non surveillé

Sur les applications

1

a $\Phi(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset)$, $\Phi(E) = \Phi(A \cup B) = (A, B)$.

b Puisque $\Phi(E) = \Phi(A \cup B)$, pour que Φ soit injective, il faut que $E = A \cup B$.

Réciproquement, supposons que $E = A \cup B$. Soit $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ telles que $\Phi(X) = \Phi(Y)$. On a donc $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$, d'où, en prenant la réunion,

$$(X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B),$$

puis

$$X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B),$$

et, enfin, puisque $A \cup B = E$: $X = Y$.

Φ est bien injective.

Une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit injective est que $A \cup B = E$.

c Montrons que Φ est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Supposons $A \cap B \neq \emptyset$: soit $\alpha \in A \cap B$. On vérifie par l'absurde que $(\{\alpha\}, \emptyset)$ n'a pas d'antécédent par Φ : si X était un tel antécédent, $A \cap X = \{\alpha\}$ fournirait $\alpha \in X$, et $B \cap X = \emptyset$ conduirait à $\alpha \notin X$, ce qui est absurde.

Ceci montre (par contraposition) le sens direct. Montrons la réciproque, en supposant $A \cap B = \emptyset$. Soit $(A', B') \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. On vérifie que $X = A' \cup B'$ est un antécédent de (A', B') par Φ :

$$\Phi(X) = (A \cap X, B \cap X) = (A \cap (A' \cup B'), B \cap (A' \cup B')) = ((A \cap A') \cup (A \cap B'), (B \cap A') \cup (B \cap B')) = (A', B').$$

2 Montrons ces équivalences par implications cycliques :

De 1. vers 2. Supposons f surjective, soit $y \in F$. Par hypothèse, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, *i.e.* tel que $x \in f^{-1}(\{y\})$: on a $\{x\} \subset f^{-1}(\{y\})$, d'où, en prenant les images directes par f : $\{y\} = f(\{x\}) \subset f(f^{-1}(\{y\}))$.

L'inclusion réciproque étant évidente, et non liée à la surjectivité (en effet : soit $z \in f(f^{-1}(\{y\}))$. Il existe $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $z = f(x)$. Or $x \in f^{-1}(\{y\})$ signifie $f(x) = y$, donc $z = y$.), on a bien l'égalité ensembliste.

De 2. vers 3. Supposons 2., et exploitons le bon comportement de la réunion avec images directes et réciproques : soit Y une partie de F. Écrivons $Y = \cup_{y \in Y} \{y\}$ (par convention, une union indexée par l'ensemble vide est vide). On a

$$\begin{aligned}
f(f^{-1}(Y)) &= f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{y \in Y} \{y\}\right)\right) \\
&= f\left(\bigcup_{y \in Y} f^{-1}(\{y\})\right) \\
&= \bigcup_{y \in Y} f(f^{-1}(\{y\})) \\
&= \bigcup_{y \in Y} \{y\} \text{ (par hypothèse 2.)} \\
&= Y.
\end{aligned}$$

d'où l'implication de 2. vers 3..

De 3. vers 4. Supposons 3., et soit Y une partie de F telle que $f^{-1}(Y) = \emptyset$. En prenant les images directes par f, il vient $f(f^{-1}(Y)) = f(\emptyset) = \emptyset$, d'où $Y = \emptyset$ par hypothèse 3. : 4. est vérifiée.

De 4. vers 1. Supposons 4., et soit $y \in F$. Comme $\{y\}$ n'est pas vide, 4. permet d'affirmer que $f^{-1}(\{y\})$ ne l'est pas non plus, donc y admet au moins un antécédent par f. Ceci valant pour tout $y \in F$, f est bien surjective.

$\boxed{\text{L'équivalence de ces assertions est donc prouvée.}}$

3

a On procède par implications cycliques.

- Supposons f injective : soit $A, A' \in \mathcal{P}(E)$ telles que $\Phi(A) = \Phi(A')$.
  Soit $a \in A$: $f(a) \in \Phi(A) = \Phi(A')$, et il existe donc $a' \in A'$ tel que $f(a') = f(a)$. Par injectivité de f, $a' = a$. Ceci prouve $A \subset A'$, puis, par symétrie des rôles joués par A et A', $A = A'$.
  La fonction Φ est donc injective.
- Supposons Φ injective. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On a $A \subset f^{-1}(f(A))$, donc $f(A) \subset f(f^{-1}(f(A)))$. L'inclusion réciproque étant également vraie (pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) \subset B$, et on prend $B = f(A)$), on a l'égalité, *i.e.* $\Phi(A) = \Phi(f^{-1}(f(A)))$ puis, par injectivité de Φ, $A = f^{-1}(f(A))$, soit encore $A = \Psi(f(A))$.
  La fonction Ψ est donc surjective.
- Supposons Ψ surjective : soit $a \in E$. Puisque Ψ est surjective, il existe $B \in \mathcal{P}(F)$ tel que $\Psi(B) = \{a\}$, *i.e.* $f^{-1}(B) = \{a\}$, *i.e.*, pour tout $b \in B$ $f(a) = b$. On a donc $B = \{f(a)\}$, ce qui conduit à $f^{-1}(f(\{a\})) = \{a\}$, donc l'unique antécédent de $f(a)$ par f est a. Les éléments de l'image de f ont un unique antécédent par f, les autres n'en ont (par définition) aucun : tout élément de F admet au plus un antécédent, et f est donc injective.

b On procède encore par implications cycliques :

- Supposons f surjective : soit $B \in \mathcal{P}(F)$. On a $B = f(f^{-1}(B)) = \Phi(f^{-1}(B))$ (cf. l'exercice précédent), donc Φ est surjective.
- Supposons Φ surjective. Soit $B, B' \in \mathcal{P}(F)$ telles que $\Psi(B) = \Psi(B')$, *i.e.* $f^{-1}(B) = f^{-1}(B')$. Par surjectivité de Φ, on peut trouver des parties A et A' de E d'images respectives B et B' par Φ. On a donc $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(A'))$, puis, en prenant l'image directe par f : $f(f^{-1}(f(A))) = f(f^{-1}(f(A')))$. Or, nous avons vu précédemment que $f(A) = f(f^{-1}(f(A)))$, et, de même $f(A') = f(f^{-1}(f(A')))$, donc $B = B'$: Ψ est injective.
- Supposons Ψ injective : en particulier, la seule partie de F d'image vide par Ψ est l'ensemble vide lui-même. La dernière propriété de l'exercice précédent est vérifiée, donc f est surjective.