Devoir non surveillé

Problème – Arithmétique et intégrales

la partie A n'a aucun lien avec les intégrales, contrairement à la partie B (vous pouvez traiter les deux parties dans l'ordre que vous souhaitez).

Soit $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite croissante des entiers premiers (on a donc $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.).
Pour tous x et y réels positifs avec $x > y$, on définit $P(x, y)$ comme valant

- ⋄ 1 si l'intervalle $]y, x]$ ne contient pas de nombre premier ;
- ⋄ le produit des nombres premiers de l'intervalle $]y, x]$ sinon.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $K(x) = P(x, 0)$.

Partie A – $K(x) \leqslant 4^x$

A.1 Donner $K(x)$, pour tout $x \in]0, 6]$. Donner les points de discontinuité de la fonction K.

A.2 Montrer pour $0 \leqslant z \leqslant y \leqslant x$ la relation :

$$P(x, z) = P(x, y)P(y, z).$$

Soit m un entier naturel non nul.

A.3 Montrer que $\binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$.

A.4 Montrer que l'entier $P(2m + 1, m + 1)$ divise l'entier $\binom{2m+1}{m}$.

A.5 En déduire que si $K(m + 1) \leqslant 4^{m+1}$, alors $K(2m + 1) \leqslant 4^{2m+1}$.

A.6

a Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, K(n) \leqslant 4^n$$

b En déduire la majoration :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, K(x) \leqslant 4^x$$

Partie B – Domination explicite de N

On note N la fonction définie par :

$$\forall x \geqslant 0, N(x) = \mathrm{Card}\{k \in \mathbb{N}^*, p_k \in [0, x]\}$$

Pour tout $x \geqslant 0$, $N(x)$ est donc le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à x.

On note S la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par

$$\forall x \geqslant 2, S(x) = \ln(K(x)).$$

B.1 Pour tout $x \geqslant 2$, déduire de la partie A un majorant de $S(x)$.

B.2 Soit f une fonction définie sur $[2, +\infty[$ à valeurs réelles, dérivable et à dérivée continue.

a Montrer que pour tout k entier naturel non nul, on a

$$\int_2^{p_k} S(t)f'(t)\mathrm{d}t = -\sum_{i\in[\![1,k]\!]} \ln(p_i)f(p_i) + S(p_k)f(p_k).$$

b Déduire pour tout réel x supérieur ou égal à 2 la relation :

$$\sum_{i\in[\![1,N(x)]\!]} \ln(p_i)f(p_i) = S(x)f(x) - \int_2^x S(t)f'(t)\mathrm{d}t.$$

B.3 On prend $f = \frac{1}{\ln}$. Déduire de la question précédente l'inégalité :

$$N(x) \leqslant 2\ln 2 \left(\frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2} \right).$$

B.4

a Étudier sur l'intervalle $[\ln 2, +\infty[$ la fonction $\psi \ : u \mapsto \frac{e^u}{u^2}$. Montrer qu'il existe un unique réel (noté u_0) strictement supérieur à $\ln 2$ tel que

$$\frac{e^{u_0}}{u_0^2} = \frac{2}{(\ln 2)^2}.$$

b Montrer, pour tout $x > e^{u_0}$, la majoration :

$$\int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{e^u}{u^2} \mathrm{d}u \leqslant \frac{x}{(\ln x)^2}(\ln x - \ln 2).$$

c Déduire, pour tout $x > e^{u_0}$, l'inégalité :

$$N(x) \leqslant 4\ln 2 \frac{x}{\ln x}.$$