Corrigé de devoir non surveillé

Problème – Conjugué harmonique et axe radical

Partie A – Conjugué harmonique

A.1 On se place dans le cas où E appartient au segment $[FP]$ (l'autre cas est analogue, par symétrie des rôles joués par E et F). Soit G le barycentre de la famille $((E, PF), (F, -PE))$ (bien défini car $PF - PE = EF \neq 0$). Ce point vérifie

$$\overrightarrow{EG} = -PE\frac{\overrightarrow{EF}}{EF} = \overrightarrow{EP},$$

donc $\boxed{G = P}$.

De même, en notant G' le barycentre (bien défini) de la famille $((E, PF), (F, PE))$, on a

$$\overrightarrow{EG'} = \frac{PE}{EP + PF}\overrightarrow{EF} = \frac{1}{1 + \frac{PF}{PE}}\overrightarrow{EF} = \frac{1}{1 + \frac{IF}{IE}}\overrightarrow{EF} = \frac{IE}{IF + IE}\overrightarrow{EF} = \frac{IE}{EF}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EI},$$

donc $\boxed{G' = I.}$

A.2 D'après la question précédente, l'affixe z_0 du conjugué harmonique I_0 de P par rapport à la droite (AB) est donnée par

$$z_0 = \frac{PB\, z_A + PA\, z_B}{PA + PB} = \frac{(p+1) - (p-1)}{(p+1) + (p-1)} = \frac{1}{p},$$

donc $\boxed{\text{l'abscisse de } I_0 \text{ vaut } 1/p\text{, son ordonnée vaut } 0.}$

A.3

a Notons E' et F' les projetés orthogonaux respectifs de E et F sur (AB). Le théorème de Thalès permet d'affirmer que

$$\frac{PE}{PF} = \frac{E'E}{F'F} = \boxed{\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}.}$$

($E'E = \sin(\alpha)$ et $F'F = \sin(\beta)$ car ces sinus sont bien positifs)

b D'après la première question, la question précédente, et l'homogénéité du barycentre, I est le barycentre de la famille $((E, \sin(\beta)), (F, \sin(\alpha)))$, donc

$$\mathrm{Re}(z_I) = \frac{\sin(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\sin(\alpha) + \sin(\beta)} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \boxed{\frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}.}$$

c $\boxed{\sin(\beta) - \sin(\alpha) = 2\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).}$

d Le nombre complexe Z donné par l'énoncé est réel, car les points P, E et F sont alignés. Sa partie imaginaire est donc nulle, *i.e.* $\mathrm{Im}((e^{i\beta} - e^{i\alpha})(e^{-i\alpha} - p)) = 0$, puis, grâce à la question précédente,

$$\boxed{\sin(\beta - \alpha) - 2p\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0.}$$

e Les questions A.3.b et A.3.d, associées au fait que $\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \neq 0$ car $(0 < \alpha < \beta < \pi)$ permettent d'affirmer que $\boxed{\mathrm{Re}(z_I) = 1/p.}$

A.4 M_1 et M_2 sont de coordonnées $(1/p, \pm\sqrt{1 - 1/p^2})$. En particulier,

$$OM_1^2 + M_1P^2 = 1 + \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 + 1 - \frac{1}{p^2} = p^2 = OM_1^2,$$

donc (OM_1) et (M_1P) sont perpendiculaires : $\boxed{(PM_1) \text{ est tangente au cercle } \mathcal{C}\text{. De même pour } (PM_2).}$

Partie B – Axe radical

B.1

$$MO_1^2 - MO_2^2 = (\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}) \cdot (\overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{O_2M}) = \boxed{\lambda\overrightarrow{O_1O_2} \cdot \overrightarrow{IM},}$$

où $\lambda = 2$.

B.2 D'après la question précédente, $\mathcal{R}$ est l'ensemble des points M vérifiant

$$2\overrightarrow{O_1O_2} \cdot \overrightarrow{IM} = R_1^2 - R_2^2.$$

On constate que le point H, défini par $\overrightarrow{IH} = \mu\overrightarrow{O_1O_2}$, où

$$\mu = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2\left\|O_1O_2\right\|^2},$$

appartient à $\mathcal{R}$.

$\mathcal{R}$ est donc l'ensemble des points M vérifiant $2\overrightarrow{O_1O_2} \cdot \overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{O_1O_2} \cdot \overrightarrow{IH}$, soit $\overrightarrow{O_1O_2} \cdot \overrightarrow{HM} = 0$: $\mathcal{R}$ est la droite passant par H, et admettant $\overrightarrow{O_1O_2}$ pour vecteur normal non nul.

B.3 On remarque que si A est un point commun à deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, alors il appartient à leur axe radical (puisque, dans un tel cas, $AO_1^2 - R_1^2 = AO_2^2 - R_2^2 = 0$) : l'axe radical de deux cercles se coupant en deux points distincts A_1 et A_2 est donc $\boxed{\text{la droite } (A_1A_2).}$

B.4 On suppose $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ tangents. Le point de contact appartient à l'axe radical des deux cercles (voir le début de la réponse précédente), et cet axe est perpendiculaire à (O_1O_2) : c'est donc la tangente commune.

Partie C – Centre radical

C.1 Les droites $\mathcal{R}_{1,2}$ et $\mathcal{R}_{1,3}$ sont sécantes, car admettent les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{O_1O_2}$ et $\overrightarrow{O_1O_3}$ pour vecteurs normaux. Notons A leur point d'intersection. Des relations

$$AO_1^2 - R_1^2 = AO_2^2 - R_2^2 \quad \text{et} \quad AO_1^2 - R_1^2 = AO_3^2 - R_3^2,$$

on déduit que $AO_2^2 - R_2^2 = AO_3^2 - R_3^2$, *i.e.* $A \in \mathcal{R}_{2,3}$.

Les droites $\mathcal{R}_{1,2}$, $\mathcal{R}_{2,3}$ et $\mathcal{R}_{1,3}$ sont donc concourantes en A.

C.2 Le point L appartient à $\mathcal{R}_{1,2}$ par hypothèse, et (LA_1) est la tangente commune à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$, donc l'axe radical $\mathcal{R}_{1,3}$: L est le point de concours de $\mathcal{R}_{1,2}$ et $\mathcal{R}_{1,3}$, c'est-à-dire le centre radical des trois cercles.

C.3 L'axe radical $\mathcal{R}_{2,3}$ n'est rien d'autre que la droite (LA_2) (les deux points L et A_2 appartiennent à cet axe), c'est-à-dire la tangente à $\mathcal{C}_2$ en A_2. L'intersection de $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{R}_{2,3}$ possède le point A_2, et ne peut en posséder d'autre (car un tel point appartiendrait également à $\mathcal{C}_2$, en revenant à la définition de l'axe radical) : $\mathcal{C}_3$ est donc tangent à $\mathcal{C}_2$ en A_2.

C.4 D'après $A.5$, le pôle de la droite (A_1A_2) par rapport au cercle $\mathcal{C}_3$ se situe à l'intersection de tangentes à $\mathcal{C}_3$ issues de A_1 et de A_2 : ce pôle est donc le point L.