Devoir non surveillé

Problème – Suite de Fibonacci et théorème de Beatty

On note Ω l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

La *suite de Fibonacci* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'élément de Ω tel que $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ (on *admet* qu'un élément de Ω est entièrement déterminé par ses deux premiers termes).

Soit X un ensemble. On dit que deux parties A et B de X en forment une *partition* si X est réunion disjointe de A et de B, *i.e.* $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = X$.

Soit $a \in]1, +\infty[$. On note

$$E_a = \{\lfloor na \rfloor,\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Dans la seconde partie de ce problème, on cherche à montrer le *théorème de Beatty* : soit $a, b \in]1, +\infty[$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E_a et E_b forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
2. a et b sont irrationnels, et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

Partie A – Sur la suite de Fibonacci

A.1 Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v \in \Omega$, $w = \lambda u + \mu v$. Montrer que $w \in \Omega$.

A.2 Déterminer les deux réels ϕ et ψ, où $\phi > \psi$, tels que les suites $(\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à Ω.

A.3 Montrer qu'il existe des réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n = a\,\phi^n + b\,\psi^n,$$

et déterminer ces réels.

A.4 Donner un équivalent simple de F_n. En déduire que $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et déterminer sa limite.

Partie B – Théorème de Beatty

Soit $a, b \in]1, +\infty[$.

B.1 Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note

$$f_a(m) = \mathrm{Card}\left(\{p \in E_a,\ p \leqslant m\}\right).$$

a Établir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{m+1}{a} - 1 \leqslant f_a(m) < \frac{m+1}{a}.$$

Que dire de la première inégalité dans le cas où a est irrationnel ?

b En déduire que la suite $\left(\frac{f_a(m)}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge, et déterminer sa limite.

B.2 On suppose dans cette question que E_a et E_b forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

a Montrer que : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

b Montrer que $\frac{a}{b}$ est irrationnel. En déduire que a et b le sont aussi.

B.3 On suppose ici a et b irrationnels, et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

a Montrer que $E_a \cap E_b = \emptyset$.

b Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Établir :

$$m - 1 < f_a(m) + f_b(m) < m + 1.$$

En déduire que $E_a \cup E_b = \mathbb{N}^*$.

B.4 Montrer que E_ϕ et E_{ϕ^2} forment une partition de $\mathbb{N}^*$.