Corrigé de devoir non surveillé

Problème – Suite de Fibonacci et théorème de Beatty

Partie A – Sur la suite de Fibonacci

A.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{array}{rcl} w_{n+2} & = & \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} \\ & = & \lambda(u_{n+1} + u_n) + \mu(v_{n+1} + v_n) \\ & = & (\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + (\lambda u_n + \mu v_n) \\ & = & w_{n+1} + w_n, \end{array}$$

donc $w \in \Omega$.

A.2 Soit a un réel. La suite (a^n) appartient à Ω si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a^{n+2} = a^{n+1} + a^n,$$

si et seulement si $a^2 = a + 1$, si et seulement si a est racine de $X^2 - X - 1$, *i.e.* $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Les deux réels cherchés sont donc $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

A.3 On peut trouver des réels a et b tels que

$$a + b = 0 \quad \text{et} \quad a\phi + b\psi = 1.$$

En effet, ce système étant de Cramer (car $\psi - \phi \neq 0$), il admet une unique solution. Un calcul simple donne $a = \frac{1}{\sqrt{5}} (= -b)$.

Les suites de termes généraux F_n et $\frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \psi^n)$ appartiennent à Ω, et coïncident aux deux premiers rangs : elles sont égales par le résultat admis.

A.4 On a $0 < \psi < 1 < \phi$, donc $\psi^n = \mathrm{o}(\phi^n)$, de sorte que $F_n \sim \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$.

Dès lors, $\frac{F_{n+1}}{F_n} \sim \phi$, donc (F_{n+1}/F_n) converge vers ϕ.

Partie B – Théorème de Beatty

B.1

a Observons que $n \mapsto \lfloor na \rfloor$ est injective, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a - na = a > 1$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. $f_a(m)$ est donc le nombre d'entiers naturels non nuls p tels que $\lfloor pa \rfloor \leqslant m$, c'est-à-dire le plus grand entier tel que l'on ait cette inégalité.

Or, pour $p \in \mathbb{N}$, $\lfloor pa \rfloor \leqslant m$ si et seulement si $pa < m+1$, si et seulement si $p < \frac{m+1}{a}$. Comme $f_a(m)$ est le plus grand entier vérifiant ceci, on a $f_a(m) < \frac{m+1}{a}$ et $f_a(m) + 1 \geqslant \frac{m+1}{a}$, d'où le résultat.

Dans le cas où a irrationnel, il ne peut pas y avoir égalité : la première inégalité est stricte.

b D'après la question précédente, $f_a(m) = \frac{m}{a} + \mathrm{O}(1) \sim \frac{m}{a}$, donc la suite $\left(\frac{f_a(m)}{m}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{a}$.

B.2

a Par hypothèse, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f_a(m) + f_b(m) = m$, d'où, en divisant par m, puis en passant à la limite à l'aide de B.1.b : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

b Supposons $\frac{a}{b}$ rationnel : il existe donc des entiers naturels non nuls p et q tels que $pa = qb$. On a alors $\lfloor pa \rfloor = \lfloor qb \rfloor \in E_a \cap E_b = \emptyset$, c'est absurde.

$\frac{a}{b}$ est donc bien irrationnel. Si a ou b était rationnel alors a et b le seraient (grâce à la question précédente), donc a/b le serait également : a et b sont irrationnels.

B.3

a Supposons avoir deux entiers $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\lfloor pa \rfloor = \lfloor qb \rfloor$. Notons k cet entier. On a donc $pa, qb \in [k, k+1[$, puis $p \in [k/a, (k+1)/a[$ et $q \in [k/b, (k+1)/b[$, et même, puisque a et b sont irrationnels, $p \in]k/a, (k+1)/a[$ et $q \in]k/b, (k+1)/b[$, ce qui conduit enfin à l'absurdité $p + q \in]k, k+1[$.

On a bien $E_a \cap E_b = \emptyset$.

Remarque : on pouvait aussi montrer ce résultat en observant que $f_a(k-1) + f_b(k-1) > \frac{k}{a} - 1 + \frac{k}{b} - 1 = k - 2$, donc $f_a(k-1) + f_b(k-1) \geqslant k - 1$, puis, comme $k \in E_a \cap E_b$,

$$f_a(k) + f_b(k) = 2 + f_a(k-1) + f_b(k-1) \geqslant k + 1,$$

ce qui contredit l'inégalité de droite de B.1.a.

b Comme a et b sont irrationnels, on a, en vertu de B.1.a :

$$\frac{m+1}{a} - 1 < f_a(m) < \frac{m+1}{a} \quad \text{et} \quad \frac{m+1}{b} - 1 < f_b(m) < \frac{m+1}{b},$$

puis, en sommant (et sachant que $1/a + 1/b = 1$) :

$$m - 1 < f_a(m) + f_b(m) < m + 1.$$

Comme $f_a(m) + f_b(m)$ est entier, $f_a(m) + f_b(m) = m$. E_a et E_b étant disjoints, $\{p \in E_a, p \leqslant m\}$ et $\{p \in E_b, p \leqslant m\}$ sont disjoints, et la somme de leur cardinaux vaut m : on a donc

$$\{p \in E_a, p \leqslant m\} \cup \{p \in E_b, p \leqslant m\} = [\![1, m]\!].$$

Ceci valant pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a bien $E_a \cup E_b = \mathbb{N}^*$.

B.4 ϕ et ϕ^2 sont des irrationnels supérieurs à 1 tels que $\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = 1$ (car $\phi^2 = \phi + 1$) : le théorème de Beatty s'applique, E_ϕ et E_{ϕ^2} forment bien une partition de $\mathbb{N}^*$.