Devoir non surveillé

Problème – Sur le calcul des variations

On considère un intervalle I d'intérieur non vide, et un ensemble E de fonctions $f\ : I \to \mathbb{R}$. On se donne une application $J\ : E \to \mathbb{R}$ définie au moyen d'une intégrale faisant intervenir f et ses dérivées. L'objectif de ce problème est d'étudier le minimum éventuel de f sur E :

$$\min_{f\in E} J(f),$$

et de déterminer, dans certains cas particuliers, les points f de E en lesquels J atteint son minimum.

On note $E^k_{a,b}$ l'ensemble des fonctions $f\ : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telles que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

Partie A – Un lemme de du Bois-Reymond

A.1 On considère le polynôme $P = (1 - X^2)^3$. Calculer $P^{(k)}(1)$ pour tout $k \in [\![0, 3]\!]$.
Indication : afin d'éviter de laborieux calculs, on pourra s'aider de la formule de Taylor (pour les polynômes).

A.2 On considère la fonction $h\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = (1 - t^2)^3$ si $|t| \leqslant 1$ et $h(t) = 0$ sinon. Montrer que $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et représenter son graphe. La fonction h est-elle de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$?

A.3 Soit x_0, x_1 des nombres réels tels que $x_0 < x_1$. Construire à partir de h une fonction $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $g(x) > 0$ pour tout $x \in]x_0, x_1[$ et $g(x) = 0$ ailleurs.

A.4 Soit $F \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 F(x)u(x)\mathrm{d}x = 0$ pour tout $u \in E^2_{0,0}$. Démontrer qu'alors F est nulle (*lemme de du Bois-Reymond*).

Partie B – Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange

Dans cette partie, on prend $E = E^2_{a,b}$ pour un couple donné (a, b) de nombres réels. La fonction J est définie sur E par la formule

$$J(f) = \int_0^1 \left(P(f(x)) + Q(f'(x))\right) \mathrm{d}x,$$

où $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont des polynômes fixés.

Soit $f_0 \in E$. On se propose de prouver que si $J(f_0) \leqslant J(f)$ pour tout $f \in E$, alors f_0 vérifie une certaine équation différentielle. Soit $u \in E^2_{0,0}$.

B.1

a Montrer que l'application q définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$q(t) = J(f_0 + tu)$$

est polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(a_0, \dots, a_r)$ de réels telle que $q(t) = \sum_{k=0}^r a_k t^k$ pour tout réel t.
Indication : on pourra utiliser la formule de Taylor (pour les polynômes).

b Expliciter le coefficient a_1 sous la forme d'une intégrale faisant intervenir les polynômes dérivés P' et Q'.

B.2 On suppose que pour tout $f \in E$, $J(f_0) \leqslant J(f)$. Montrer qu'alors $a_1 = 0$ et en déduire l'équation différentielle

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad P'(f_0(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(Q'(f_0'(x))\right) = \left(Q' \circ f_0'\right)'(x).$$

B.3 On choisit dans cette question $E = E^2_{0,1}$ et $J = J_1$ définie par $J_1(f) = \int_0^1 (f'(x))^2 \mathrm{d}x$.

a Former l'équation différentielle Δ correspondante. Parmi ses solutions, préciser celles qui appartiennent à $E^2_{0,1}$.

b Montrer que J_1 admet un minimum sur $E^2_{0,1}$, préciser sa valeur ainsi que les points de $E^2_{0,1}$ où ce minimum est réalisé.

Indication : on pourra s'aider de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

B.4 On choisit dans cette question $E = E^2_{0,0}$ et $J = J_2$ définie par

$$J_2(f) = \int_0^1 (f'(x))^2 + (f'(x))^3 \mathrm{d}x.$$

a Former l'équation différentielle Δ correspondante. Parmi ses solutions, montrer que seule la fonction nulle appartient à $E^2_{0,0}$.

b Montrer que J_2 n'admet pas de minimum sur $E^2_{0,0}$.

Indication : on pourra considérer, pour λ réel, $J_2(\lambda f)$, où $f\ : x \in [0,1] \mapsto x^2(1-x)$.

Partie C – Fonctions de carré intégrable

Soit f une fonction continue *positive* de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *intégrable* (sur $\mathbb{R}_+$) si la fonction croissante $I_f\ : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$, qui est alors notée $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

On peut observer que f est intégrable si et seulement si I_f est majorée, si et seulement si I_f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$.

C.1 Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ positive et intégrable. Montrer que f n'est pas minorée par un réel strictement positif au voisinage de $+\infty$.

C.2 Soit $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

a On suppose g intégrable et $0 \leqslant f \leqslant g$. Montrer que f est intégrable.

b On suppose f et g intégrables. Montrer que $f + g$ est intégrable.

C.3 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *intégrable* (sur $\mathbb{R}_+$) si $|f|$ l'est. On pose $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \min(f, 0)$ (on a donc $f = f_+ + f_-$).

Montrer que f est intégrable si et seulement si les fonctions positives f_+ et $-f_-$ le sont. En déduire que si f est intégrable, alors $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ (qui est alors notée $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$).

On note, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, L^p l'ensemble des fonctions f, continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, telles que f^p soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $f \in L^2$, on pose : $\|f\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} (f(t))^2 \mathrm{d}t}$.

C.4 Montrer que L^1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

C.5

a Soit $f, g \in L^2$. Montrer que $fg \in L^1$.

b Montrer que L^2 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Partie D – Un exemple avec dérivée seconde

Dans cette partie, E désigne l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}_+$, et la fonction J est définie par

$$J(f) = \int_0^{+\infty} \left((f(x))^2 - (f'(x))^2 + (f''(x))^2\right) \mathrm{d}x.$$

On introduit une fonction ψ définie par, pour tout réel t :

$$\psi(t) = e^{-t/2} \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right).$$

D.1 Montrer que $\psi \in E$.

On considère $f \in E$.

D.2

a Montrer que ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et que $f(x)f'(x)$ *ne tend pas* vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

b En déduire que $f' \in L^2$, puis que $f(x)f'(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

D.3

a Montrer que pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_0^A \left((f(x))^2 - (f'(x))^2 + (f''(x))^2\right) \mathrm{d}x = \int_0^A \left(f(x) + f'(x) + f''(x)\right)^2 \mathrm{d}x + (f(0) + f'(0))^2 - (f(A) + f'(A))^2.$$

b Montrer que $(f(A) + f'(A))^2$ tend vers une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$, puis que cette limite est nulle.

c En déduire que

$$J(f) = (f(0) + f'(0))^2 + \int_0^{+\infty} \left(f(x) + f'(x) + f''(x)\right)^2 \mathrm{d}x.$$

d Montrer que J admet 0 pour minimum, et que l'ensemble des fonctions (de E) où ce minimum est atteint est $\{\lambda\psi, \lambda \in \mathbb{R}\}$.