Corrigé de devoir non surveillé

Problème – Sur le calcul des variations

Partie A – Un lemme de du Bois-Reymond

A.1 1 est racine triple de P, donc[1] $P^{(k)}(1) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$. De plus,

$$P(X) = -(1+X)^3(X-1)^3 = -(X-1)^3(2+(X-1))^3 = (X-1)^3(-8-12(X-1)-18(X-1)^2-(X-1)^3),$$

donc la formule de Taylor donne $P^{(3)}(1) = -48$.

A.2 $h_{|[-1,1]}$, $h_{|[1,+\infty[}$ et $h_{|]-\infty,-1]}$ sont évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ leurs domaines respectifs : les seuls problèmes se posent en -1 et 1. Par parité de h, il suffit de considérer le cas de 1.

D'après la question précédente, $h'_g(1) = h''_g(1) = 0$ et $h'''_g(1) = -48$.

Bien sûr, h étant identiquement nulle sur $[1, +\infty[$, $h'_d(1) = h''_d(1) = h'''_d(1) = 0$: h est donc bien de classe $\mathcal{C}^2$ mais non de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

A.3 La fonction h convient pour $(x_0, x_1) = (-1, 1)$: pour le cas général, il suffit de « transporter » le segment $[-1, 1]$ sur $[x_0, x_1]$, par le paramétrage usuel $\varphi\ : t \in [-1, 1] \mapsto \frac{1-t}{2}x_0 + \frac{1+t}{2}x_1$: la fonction $g = h \circ \varphi^{-1}$ répond à la question.

A.4 Raisonnons par l'absurde, en supposant f non nulle en un certain $x \in [0, 1]$: par continuité de f, il existe un segment $[x_0, x_1]$ inclus dans $[0, 1]$, de longueur non nulle (*i.e.* $x_0 < x_1$), tel que f ne s'annule pas (et garde donc un signe constant) sur ce segment. Avec les notations de la question précédente, et en prenant $u = g$, obtient une fonction continue, de signe constant, non identiquement nulle, et d'intégrale pourtant nulle : c'est absurde.

Partie B – Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange

B.1

a Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} q(t) &= J(f_0 + tu) \\ &= \int_0^1 (P(f_0(x) + tu(x)) + Q(f_0'(x) + tu'(x)))\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k \geqslant 0} \frac{\left(\int_0^1 \left(P^{(k)}(f_0(x))(u(x))^k + Q^{(k)}(f_0'(x))(u'(x))^k\right)\mathrm{d}x\right)}{k!} t^k \end{aligned}$$

d'après la formule de Taylor, donc q est bien polynomiale.

b D'après le calcul effectué ci-dessus :

$$a_1 = \int_0^1 (P'(f_0(x))(u(x)) + Q'(f_0'(x))(u'(x)))\,\mathrm{d}x.$$

B.2 Pour tout réel t, $f_0 + tu \in E^2_{a,b}$ puisque $f_0 \in E^2_{a,b}$ et $u \in E_{0,0}(2)$. Par hypothèse, la fonction q, dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, présente donc un minimum en 0, d'où $q'(0) = 0$, *i.e.* $a_1 = 0$.

1. et $P^{(3)}(1) \neq 0$, ce qui suffit pour répondre à la question suivante.

En effectuant une intégration par parties dans l'expression de a_1 trouvée ci-dessus (licite car les fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}^1$), on obtient

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^1 \left(P'(f_0(x))(u(x)) + Q'(f_0'(x))(u'(x))\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 P'(f_0(x))u(x)\mathrm{d}x + \left[Q'(f_0'(x))u(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Q'(f_0'(x)))u(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(P'(f_0(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Q'(f_0'(x))\right)\right) u(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Comme $a_1 = 0$, et ceci valant pour tout $u \in E^2_{0,0}$, le lemme de du Bois-Reymond permet de conclure :

$$\forall\, x \in [0,1], \quad P'(f_0(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Q'(f_0'(x))\right).$$

B.3

a Ici, $P = 0$ et $Q = X^2$, donc l'équation différentielle correspondante est

$$(\Delta) \quad 2y'' = 0,$$

dont les solutions sont les fonctions affines, et donc l'unique solution de Δ appartenant à $E^2_{0,1}$ est $\mathrm{Id}_{[0,1]}$.

b Soit $f \in E^2_{0,1}$. On a $J(\mathrm{Id}_{[0,1]}) = 1$ et, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$1 = \left(\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 1\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x\right) = J_1(f),$$

donc J_1 admet 1 pour minimum sur $E^2_{0,1}$ et ce minimum n'est atteint qu'en $\mathrm{Id}_{[0,1]}$.

B.4

a Ici, $P = 0$ et $Q = X^2 + X^3$, donc $P' = 0$, $Q' = 2X + 3X^2$, et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Q'(f'(x))) = 2f''(x) + 6f'(x)f''(x)$, d'où l'équation différentielle

$$(\Delta) \ : 2y'' + 6y'y'' = 0.$$

Soit f une solution de Δ : $f'' + 3f'f'' = 0$, donc $f' + \frac{3}{2}(f')^2$ est constant, puis f' prend au plus deux valeurs (un polynôme de degré deux admet au plus deux racines), donc f' est constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires, puis f est affine : la seule solution de Δ s'annulant en 0 et en 1 est la fonction nulle.

b Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Un calcul limite indécent nous informe que $\int_0^1 (f'(x))^3\mathrm{d}x \neq 0$, de sorte que $J_2(\lambda f)$ est un polynôme en λ de degré 3 : son image est donc $\mathbb{R}$, ce qui prouve que J_2 n'admet pas de minimum sur $E^2_{0,0}$.

Partie C – Fonctions de carré intégrable

C.1 Supposons f minorée par un réel strictement positif c sur un voisinage $[a, +\infty[$ de $+\infty$. Pour tout $x \geqslant a$:

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(t\mathrm{d}t) + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_0^a f(t)\mathrm{d}t + c(x-a),$$

puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = +\infty$, ce qui est absurde : f n'est pas minorée par un réel strictement positif au voisinage de $+\infty$.

C.2

a Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a, par croissance de l'intégrale et de I_g

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t,$$

donc la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est croissante et bornée : elle admet une limite finie en $+\infty$, et f est intégrable.

b On a, par linéarité de l'intégrale, $I_{f+g} = I_f + I_g$, donc I_{f+g} admet une limite finie en $+\infty$, *i.e.* $f+g$ est intégrable.

C.3

a Comme $f_+(x) = \frac{f(x)+|f(x)|}{2}$ et $f_-(x) = \frac{f(x)-|f(x)|}{2}$ pour tout réel x, f_+ et f_- sont bien continues. On a de plus $f_+ \leqslant |f|$, $0 \leqslant -f_- \leqslant |f|$ et $|f| = f_+ + (-f_-)$, d'où le premier résultat.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f_+(t)\mathrm{d}t - \int_0^x -f_-(t)\mathrm{d}t,$$
donc si f est intégrable, alors $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

C.4 L^1 est une partie de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$, non vide, puisqu'il comprend la fonction nulle.

Soit $f, g \in L^1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme $|\lambda f + \mu g| \leqslant |\lambda||f| + |\mu||g|$, et que
$$I_{|\lambda||f|+|\mu||g|} = |\lambda| I_{|f|} + |\mu| I_{|g|},$$
$\lambda f + \mu g$ est intégrable.

L^1 est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

C.5

a Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :
$$\int_0^x |f(t)g(t)|\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^x f(t)^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_0^x g(t)^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant \|f\|\,\|g\|,$$
donc $|fg|$ est intégrable ($I_{|fg|}$ est majorée).

b Soit $f, g \in L^2$: $(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$ est la somme de trois fonctions intégrables, et est donc aussi intégrable. Bien sûr, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in L^2$.

Ainsi, L^2 (par ailleurs partie évidemment non vide de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Partie D – Un exemple avec dérivée seconde

D.1 Notons $g\ : t \mapsto e^{-t}$. $\int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t = 1 - e^{-x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$, donc la fonction positive g est intégrable.

ψ est clairement de classe $\mathcal{C}^4$, et $\psi^2 \leqslant g$ donc ψ^2 est intégrable en vertu de C.2.a.

Clairement, $\psi'' \in \mathrm{Vect}(t \mapsto e^{-t/2}\cos(t), t \mapsto e^{-t/2}\sin(t))$, donc $(\psi'')^2$ est intégrable.

Finalement, on a bien $\psi \in E$.

D.2

a ff'' est intégrable car $f, f'' \in L^2$ (cf. C.5.a).

Supposons que ff' tende vers $+\infty$ en $+\infty$. On montre alors que $\frac{1}{2}f^2$, qui en est une primitive, tend également vers $+\infty$ en $+\infty$, ce qui contredit l'intégrabilité de f^2 (cf. C.1).

b Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$\int_0^x (f'(t))^2\mathrm{d}t = [f(t)f'(t)]_0^x - \int_0^x f(t)f''(t)\mathrm{d}t,$$
donc si la quantité de gauche tendait vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, alors par intégrabilité de ff'', $[f(t)f'(t)]_0^x$ tendrait également vers $+\infty$ en $+\infty$, ce qui n'est pas le cas.

Ceci montre que $(f')^2$ est intégrable,

D.3

a Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\begin{aligned}
&\int_0^A \left(f(x) + f'(x) + f''(x)\right)^2 \mathrm{d}x - \int_0^A \left((f(x))^2 - (f'(x))^2 + (f''(x))^2\right)\mathrm{d}x \\
=\ & 2\int_0^A \left((f'(x))^2 + f(x)f''(x) + f'(x)f''(x) + f(x)f'(x)\right)\mathrm{d}x \\
=\ & \int_0^A 2(f''(x) + f'(x))(f'(x) + f(x))\mathrm{d}x \\
=\ & \left[(f(x) + f'(x))^2\right]_0^A \\
=\ & (f(A) + f'(A))^2 - (f(0) + f'(0))^2,
\end{aligned}$$
d'où le résultat.

b On sait que $(f + f' + f'')^2$ est intégrable, ainsi que $f^2 - (f')^2 + (f'')^2$, donc $(f(A) + f'(A))^2$ tend vers une limite finie en $+\infty$. Cette limite est nécessairement nulle, puisque $(f + f')^2$ est intégrable (si cette limite était strictement positive, $(f + f')^2$ serait absurdement minorée par un réel strictement positif au voisinage de $+\infty$).

c En passant à la limite dans la formule trouvée en D.3.a (ce passage est justifié par la question précédente), on obtient

$$J(f) = (f(0) + f'(0))^2 + \int_0^{+\infty} (f(x) + f'(x) + f''(x))^2 \, \mathrm{d}x \geqslant 0.$$

d En observant la nouvelle expression de $J(f)$, on constate que $J(f) \geqslant 0$, et que $J(f) = 0$ si et seulement si $f'(0) + f(0) = 0$ et f est solution de $y'' + y' + y = 0$: le cours sur les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants nous montre que l'ensemble cherché est une droite vectorielle. De plus, ψ est (non nulle,) solution de cette équation différentielle, et vérifie $\psi'(0) + \psi(0) = 0$, d'où le résultat demandé.