

Devoir non surveillé

Exercice 1 : Calculs d'une somme (X MP 05)

Le but de cet exercice est de trouver une expression plus simple de

$$N = (1 \times 2 \times 3) + (2 \times 3 \times 4) + \cdots + (999 \times 1000 \times 1001),$$

par différentes manières.

1 (Utilisation du principe de récurrence)

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $N_n = (1 \times 2 \times 3) + \cdots + (n-1)n(n+1)$.

a Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $N_n = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$.

b En déduire la valeur de N .

2 (Utilisation du symbole de somme)

a Montrer que pour tout entier naturel n : $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

b Donner et montrer une formule analogue pour $\sum_{k=0}^n k$.

c En remarquant que $N = \sum_{k=0}^{1000} (k-1)k(k+1)$, en déduire la valeur de N .

3 (Utilisation d'un dénombrement)

On considère l'ensemble Ω des parties de cardinal 4 de $\llbracket 1, 1002 \rrbracket$.

a Donner le cardinal de Ω .

b En regroupant les éléments de Ω ayant même maximum, prouver que

$$\sum_{k=3}^{1001} \binom{k}{3} = \binom{1002}{4}.$$

c En déduire la valeur de N .