Devoir non surveillé

Théorème de Cantor-Bernstein

Soit X et Y deux ensembles non vides. On suppose qu'il existe une injection f de X vers Y, et une injection g de Y vers X. Il s'agit de montrer que X et Y sont équipotents (c'est le *théorème de Cantor-Bernstein*).

1 Traiter le cas où l'un des ensembles est fini.

2 Traiter le cas où $f(X) = Y$.

On suppose dans la suite que $f(X) \neq Y$, et on note $\varphi = f \circ g$. On définit par récurrence les ensembles $A_0 = Y \setminus f(X)$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = \varphi(A_n)$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

3 Montrer que A est stable par φ.

4 Montrer que les termes de (A_n) sont deux à deux disjoints.

5 Soit $y \notin A$. Montrer qu'il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = y$.

6 Soit $x \in X$. Montrer que si $f(x) \in A$, alors $x \in g(A)$.

7 On définit la fonction $h\ : Y \to X$ par $h(y) = g(y)$ si $y \in A$ et $h(y)$ est l'unique antécédent de y par f si $y \notin A$.

- **a** Montrer que h est bien définie.
- **b** Montrer que h est injective.
- **c** Montrer que h est surjective.

8 Conclure.