Corrigé de devoir non surveillé

Théorème de Cantor-Bernstein

1 Supposons par exemple X fini. L'application g étant injective, Y est aussi fini, et $|Y| \leqslant |X|$. Considérant l'application injective f, on obtient $|X| \leqslant |Y|$, puis $|X| = |Y|$. L'application f, injective entre ensembles finis de même cardinal, est donc bijective.

2 Dans le cas où $f(X) = Y$, f est surjective en plus d'être injective, X et Y sont donc équipotents.

3 Soit $a \in A$: soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $a \in A_n$. On a $\varphi(a) \in \varphi(A_n) = A_{n+1} \subset A$, donc A est stable par φ.

4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de A_0, $A_0 \cap \operatorname{Im}(f) = \emptyset$. Or $\operatorname{Im}(\varphi) \subset \operatorname{Im}(f)$, donc $A_0 \cap \operatorname{Im}(\varphi) = \emptyset$. Comme en outre $A_n \subset \operatorname{Im}(\varphi)$, A_0 et A_n sont disjoints.

Soit $m \in [\![1, m-1]\!]$. Supposons que A_m et A_n aient un élément commun a : il existe $b, c \in A_0$ tels que $a = \varphi^m(b) = \varphi^n(c)$, et donc tels que

$$\varphi^m(b) = \varphi^m(\varphi^{n-m}(c)).$$

Or φ^m est injective comme composée de telles fonctions, d'où $b = \varphi^{n-m}(c)$, ce qui contredit le fait déjà établi que A_0 et A_{n-m} soient disjoints.

5 L'unicité d'un tel antécédent provient de l'injectivité de f. L'existence provient du fait que $A_0 \subset A$, d'où $x \notin A_0$, puis $x \in f(X)$.

6 Supposons $f(x) \in A$. Par définition de A_0, $f(x) \notin A_0$, et il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(x) \in A_n = \varphi(A_{n-1})$: soit $z \in A_{n-1}$ tel que $f(x) = \varphi(z)$. Comme $\varphi = f \circ g$, et que f est injective, $x = g(z) \in g(A_{n-1}) \subset g(A)$.

7

a Soit $y \in Y$. Comme $g(y)$ est bien défini (et élément de X), $h(y)$ est bien défini lorsque $y \in A$. Lorsque $y \notin A$, on sait que y admet un unique antécédent par f. L'application h est donc bien définie.

b Les applications g et $(f^{|f(X)})^{-1}$ étant injectives, $h_{|A}$ et $h_{|f(X)}$ sont injectives.

Supposons que a et b soient des éléments respectifs de A et $f(X)$ tels que $h(a) = h(b)$. On écrit $b = f(x)$ pour un certain $x \in X$. On a donc : $g(a) = h(a) = h(b) = x$, d'où, en appliquant f, $b = f(g(a)) = \varphi(a) \in A$, ce qui est absurde.

h est bien injective.

c Bien sûr, $h(A) = g(A)$.

Soit $b \in X \setminus g(A)$. En particulier, $f(b) \notin \cup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$, or $f(b) \notin A_0$ par définition de A_0, donc $f(b) \notin A$, puis $h(f(b)) = b$ par définition de h.

h est donc bien surjective.

8 h est une bijection de Y sur X, ces ensembles sont donc équipotents.