DM de MPSI2

Devoir non surveillé

Exercice 1 : Trace et image de la sphère unité par une forme quadratique

On note $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Si n est un entier positif, on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique, noté $(X|Y)$ pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$. On note $\|X\| = \sqrt{(X, X)}$ la norme associée.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On assimile $\mathbb{R}^n$ à l'espace des vecteurs colonnes d'ordre n (*i.e.* à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à son algèbre d'endomorphismes $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, $(X|Y) = ({}^tX)Y$. On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme de ses éléments diagonaux : $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$. On rappelle que $\mathrm{tr}(A)$ est égale à la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leurs ordres de multiplicité. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = \det(A - XI_n)$ et on définit

$$R(A) = \{{}^tXAX / \ X \in \mathbb{R}^n, \ \|X\| = 1\},$$

qui est une partie de $\mathbb{R}$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1 Démontrer que les valeurs propres réelles de A sont dans $R(A)$.

2

a Démontrer que les éléments $a_{i,i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de la diagonale de A sont dans $R(A)$.

b En considérant la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que les éléments $a_{i,j}$ avec $i \neq j$ ne sont pas nécessairement dans $R(A)$.

3 On considère deux nombres réels $a \in R(A)$ et $b \in R(A)$, avec $a < b$. Soient X_1 et X_2 deux vecteurs de norme 1 tels que ${}^tX_1AX_1 = a$ et ${}^tX_2AX_2 = b$.

a Démontrer que X_1 et X_2 sont linéairement indépendants.

b On pose $X_\lambda = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$ pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Démontrer que la fonction $\phi \ : \ \lambda \mapsto \frac{{}^tX_\lambda AX_\lambda}{\|X_\lambda\|^2}$ est définie et continue sur l'intervalle $[0, 1]$.

c En déduire que le segment $[a, b]$ est inclus dans $R(A)$.

4 Démontrer que si $\mathrm{tr}(A) = 0$, alors $0 \in R(A)$.

5 Soit Q une matrice orthogonale réelle. Démontrer que $R(A) = R({}^tQAQ)$.

6 On considère les conditions suivantes :

(C_1) $\mathrm{tr}(A) \in R(A)$

(C_2) il existe une matrice orthogonale réelle Q telle que la diagonale de la matrice ${}^tQAQ$ soit de la forme $(\mathrm{tr}(A), 0, \dots, 0)$.

a Démontrer que la condition (C_2) entraine la condition (C_1).

b On suppose que $x \in R(A)$. Démontrer qu'il existe une matrice Q_1 orthogonale telle que ${}^tQ_1AQ_1 = \begin{pmatrix} x & L \\ C & B \end{pmatrix}$ où B est une matrice de format $(n-1, n-1)$ ($B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$), C un vecteur colonne à $n-1$ éléments ($C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$) et L un vecteur ligne à $n-1$ éléments ($L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$).

c Démontrer que si la matrice A est symétrique, il en est de même pour la matrice B ci-dessus.

d Démontrer que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}({}^tQ_1AQ_1)$.

e En déduire que si A est symétrique, la condition (C_1) entraîne la condition (C_2).

Indication : on pourra raisonner par récurrence sur n.