Corrigé de devoir non surveillé

Exercice 1 : Trace et image de la sphère unité par une forme quadratique

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1 Soit λ une valeur propre réelle de A et X un vecteur propre associé. $Y = X/\|X\|$ est encore vecteur propre associé à λ et

$$\lambda = \lambda(Y|Y) = (Y|AY) =^t YAY \in R(A).$$

2 Notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On remarque que (la base étant orthonormée)

$$\forall i,j \in \{1,\dots,n\},\ {}^te_jAe_i = (e_j|Ae_i) = \left(e_j, \sum_{k=1}^n a_{k,i}e_k\right) = a_{j,i}$$

a Les e_i sont des vecteurs normés et on a donc

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ a_{i,i} =^t e_iAe_i \in R(A)$$

b Avec la matrice A donnée, on a

$$\forall X = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ {}^tXAX = 0$$

et donc $R(A) \subset \{0\}$ (et même égalité car on a vu que $0 \in R(A)$ à la question précédente). Cet exemple montre donc que les coefficients non diagonaux de A ne sont pas forcément dans $R(A)$.

3

a X_1 et X_2 étant de norme 1, ils sont liés si et seulement si ils sont égaux ou opposés. Or, ${}^t(-X_1)A(-X_1) =^t X_1AX_1 = a \neq b$ et ainsi $X_2 \neq \pm X_1$. Finalement, la famille (X_1,X_2) est libre.

b ϕ est bien définie sur tout $\mathbb{R}$ car X_λ n'est pas nul (car (X_1,X_2) est libre et l'un des scalaires λ ou $1-\lambda$ est non nul).
Les coefficients de X_λ dépendent continûment de λ et les expressions au numérateur et au dénominateur de $\phi(\lambda)$ sont des produits, sommes et produits par des constantes de ces coefficients. Par théorèmes d'opérations, ϕ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

c $\phi(0) = b$ et $\phi(1) = a$. Par théorème de valeurs intermédiaires appliqué à l'application continue ϕ sur l'intervalle $[0,1]$, tout élément de $[a,b]$ est image par ϕ d'un élément de $[0,1]$. Soit $c \in [a,b]$ et $\lambda \in [0,1]$ tel que $\phi(\lambda) = c$. On a alors $c =^t Y_\lambda AY_\lambda$ avec $Y_\lambda = X_\lambda/\|X_\lambda\|$ et comme $\|Y_\lambda\| = 1$, $c \in R(A)$. Finalement

$$\forall a,b \in R(A),\ [a;b] \subset R(A)$$

ce qui signifie que $R(A)$ est convexe.

4 Si $\mathrm{tr}(A) = 0$ alors, les coefficients diagonaux de A ne peuvent être tous strictement négatifs ou tous strictement positifs. Il y en a donc un positif et un négatif ; notons les b et a. On a alors $0 \in [a,b] \subset R(A)$ et donc $0 \in R(A)$.

5 Soit $X \in \mathbb{R}^n$ avec $\|X\| = 1$. On a alors $Y = QX$ qui est de norme 1 (car Q est orthogonale) et donc ${}^tYAY \in R(A)$ c'est à dire ${}^tX^tQAQX \in R(A)$. Ceci montre que $R({}^tQAQ) \subset R(A)$. L'inclusion réciproque s'obtient en reprenant le même argument avec Q^{-1} qui est aussi orthogonale. Ainsi,

$$\forall Q \in O_n(\mathbb{R}),\ R(A) = R({}^tQAQ)$$

6

a On suppose (C_2) vérifiée avec la matrice Q. On a alors (questions I.B.1 et I.E)

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}({}^tQAQ) \in R({}^tQAQ) = R(A)$$

et la condition (C_1) est donc vérifiée.

b Comme $x \in R(A)$, il existe $X_1 \in \mathbb{R}^n$ avec $\|X_1\| = 1$ tel que $x ={}^t X_1AX_1$. On sait que l'on peut compléter X_1 en $(X_1, \ldots, X_n)$ formant une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$. Notons Q_1 la matrice dont les colonnes sont les X_i : Q_1 est la matrice de passage de la base canonique à la base $(X_1, \ldots, X_n)$ et est orthogonale (car les bases sont orthonormées). Notons $A' ={}^t Q_1AQ_1 = Q_1^{-1}AQ_1$. D'après les calculs explicités en I.B, et comme $Q_1e_1 = X_1$, on a

$$a'_{1,1} ={}^t e_1A'e_1 ={}^t (Q_1e_1)A(Q_1e_1){}^tX_1AX_1 = x$$

${}^tQ_1AQ_1$ a donc bien la forme voulue.

c Si A est symétrique alors ${}^tQ_1AQ_1$ l'est aussi et donc B l'est.

d Q_1 étant orthogonale, ${}^tQ_1 = Q_1^{-1}$. La trace étant un invariant de similitude, on a ainsi $\mathrm{tr}({}^tQ_1AQ_1) = \mathrm{tr}(A)$.

e Montrons par récurrence que la propriété H_n : si $A \in S_n(\mathbb{R})$ vérifie (C_1) alors A verifie C_2 est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- Initialisation : tout élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ vérifiant (C_1) et (C_2), H_1 est vraie de façon immédiate.
- Hérédité : soit $n \geqslant 2$ tel que $H_1, \ldots, H_{n-1}$ soient vraie. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ vérifiant (C_1). Les questions précédentes appliquées avec $x = \mathrm{tr}(A)$ (qui est dans $R(A)$ puisque A vérifie (C_1)) donnent des matrices Q_1, B, L, C. B est alors une matrice symétrique de trace nulle (puisque $x + \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}({}^tQ_1AQ_1) = \mathrm{tr}(A) = x$). D'après la question I.D, $0 \in R(B)$ et B vérifie donc (C_1). Par l'hypothèse au rang $n-1$, il existe $Q'_2 \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que la diagonale de ${}^tQ'_2BQ'_2$ soit nulle. Posons $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q'_2 \end{pmatrix}$; $Q_2 \in O_n(\mathbb{R})$ $(Q_2^tQ_2 = I_n)$ et

$$ {}^tQ_2{}^tQ_1AQ_1Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tQ'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & L \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & LQ'_2 \\ {}^tQ'_2C & {}^tQ'_2BQ'_2 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice a pour diagonale $(\mathrm{tr}(A), 0, \ldots, 0)$ et $Q_1Q_2 \in O_n(\mathbb{R})$ (car $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe). A vérifie donc (C_2) et H_n est prouvée.