Corrigé de devoir non surveillé

Endomorphismes vérifiant $u^2 = ku$

1

a L'existence d'un tel rapport est claire par définition d'une homothétie, l'unicité est assurée par le fait que E soit non nul.

b Si f est de rapport nul, alors c'est l'application nulle, non surjective car E est non nul. Si f est de rapport non nul λ, alors elle admet l'homothétie de rapport $1/\lambda$ pour inverse, et est donc bijective.

f est inversible si et seulement si son rapport est non nul.

2

a Si u est inversible -donc simplifiable-, u est alors l'homothétie de rapport k sur E. Réciproquement, cette homothétie est bien élément de A_k. A_k admet un élément inversible si et seulement si $k \neq 0$, et cet élément est, le cas échéant, l'homothétie de rapport k.

b Si $x = u(y) \in \operatorname{Im} u$ $(y \in E)$, alors $u(x) = u(u(y)) = ku(y) = kx$.

c Un élément x commun à $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ vérifie $u(x) = 0$ et $u(x) = kx$. Si $k \neq 0$, on a $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$. De plus, tout vecteur x de E peut s'écrire $x = (x - \frac{1}{k}u(x)) + \frac{1}{k}u(x)$, donc comme somme d'un vecteur de $\operatorname{Ker} u$ (à savoir $x - \frac{1}{k}u(x)$) et d'un vecteur de $\operatorname{Im} u$ (à savoir $\frac{1}{k}u(x)$) : $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont des sous-espaces supplémentaires dans E. Si $k = 0$, on a bien sûr $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.

3 Si $uv + vu = 0$, alors $kuv + uvu = 0$, $uvu + kvu = 0$ (en composant à gauche puis à droite par u). Comme $k \neq 0$, on en déduit facilement que $uv = vu = 0$.

4

a $u + v \in A_k$ si et seulement si $(u + v)^2 = k(u + v)$, *i.e.* $uv + vu = 0$, soit encore $uv = vu = 0$ d'après la question précédente (l'implication $(uv = vu = 0) \Rightarrow (uv + vu = 0)$ étant évidente).

b Bien sûr, $\operatorname{Im}(u + v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$. Pour l'inclusion inverse, remarquons que si $x = u(y) \in \operatorname{Im} u$, alors $x = \frac{1}{k}(u + v)(u(y)) \in \operatorname{Im}(u + v)$, donc $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im}(u + v)$. De même, $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im}(u + v)$, et donc $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im}(u + v)$.

c Bien sûr, $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker}(u + v)$. Pour l'inclusion inverse, remarquons que si $x \in \operatorname{Ker}(u + v)$, alors en composant à gauche par u, on a $ku(x) = 0$ et donc, puisque $k \neq 0$, $x \in \operatorname{Ker} u$. De même $x \in \operatorname{Ker} v$, donc $\operatorname{Ker}(u + v) \subset \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v$.

5 Si $uv = vu$, alors $(uv)^2 = uvuv = u^2v^2 = k^2uv$ appartient à l'ensemble A_{k^2}.

On a évidemment $\operatorname{Im} uv \subset \operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} uv \subset \operatorname{Im} v$ (puisque $uv = vu$) donc $\operatorname{Im} uv \subset \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v$. Si $x = u(y) = v(z) \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v$, alors $kx = u(x) = uv(z)$. Puisque $k \neq 0$, $x \in \operatorname{Im} uv$: $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} uv$.

On a évidemment $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} uv$ et $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} uv$ (puisque $uv = vu$), donc $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} uv$. Si $x \in \operatorname{Ker} uv$, alors $x = (x - \frac{1}{k}u(x)) + \frac{1}{k}u(x)$, où $x - \frac{1}{k}u(x) \in \operatorname{Ker} u$ et $\frac{1}{k}u(x) \in \operatorname{Ker} v$: $\operatorname{Ker} uv \subset \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v$.