Devoir non surveillé

Problème – Centre du commutant d'un endomorphisme diagonalisable

1. E désignera un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et u et v désigneront des endomorphismes de E. La composition $\circ$ dans $\mathcal{L}(E)$ sera notée multiplicativement, de sorte que $u \circ v$ pourra s'écrire uv.
2. Étant donné des sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$ de E, on dit que ces sous-espaces sont en *somme directe* si
$$\begin{array}{rccc} \psi : & E_1 \times \cdots \times E_p & \to & E \\ & (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & x_1 + \cdots + x_p \end{array}$$
est injective. On dit alors que la somme $E_1 + \cdots + E_n$ est *directe*, et on peut la noter $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$. Si $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$, alors $\mathcal{L}(E)$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E_1, E) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_p, E)$, en associant à $v \in \mathcal{L}(E)$ le p-uplet $(v_1, \dots, v_p)$ de ses restrictions respectives (au départ) à $E_1, \dots, E_p$ (inutile de le prouver).
3. Pour toute partie non vide U de $\mathcal{L}(E)$, on appelle *centre* de U et on note $\mathcal{C}(U)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments de U, *i.e.* :
$$\mathcal{C}(U) = \{v \in \mathcal{L}(E), \forall\, u \in U, uv = vu\}.$$
On appelle *commutant* de u et on note $\mathcal{C}(u)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u (c'est donc le centre de $\{u\}$).
4. Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ (où $(a_k)_{k \in [\![0,d]\!]} \in \mathbb{R}^{d+1}$), on note $P(u)$ l'endomorphisme
$$\sum_{k=0}^{d} a_k u^k.$$
Par exemple, on a $(5 + 2X + 4X^3)(u) = 5\mathrm{Id}_E + 2u + 4u^3$ et $((X-1)(X-3))(u) = (u - \mathrm{Id}_E)(u - 3\mathrm{Id}_E)$.
5. On note $\mathbb{R}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{R}[X]\}$. On peut observer que $\mathbb{R}[u]$ est le plus petit sous-anneau (au sens de l'inclusion) de $\mathcal{L}(E)$ possédant u (inutile de le montrer).
6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est une *valeur propre* de u si $u - \lambda\mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif, *i.e.* $\mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id}_E)$ n'est pas réduit au vecteur nul. Ce noyau est appelé *sous-espace propre* associé à λ (et à u), et noté $E_\lambda(u)$. Les éléments *non nuls* de $E_\lambda(u)$ sont appelés *vecteurs propres* de u associés à la valeur propre λ.
7. On dit que u est *diagonalisable* s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour u, *i.e.* E est somme des sous-espaces propres pour u. *On admet*[1] *que cette somme est nécessairement directe.*

1. Ceux qui ont fini le DS peuvent s'amuser à le prouver.

Partie A – Préliminaires

A.1 Soit U une partie non vide de $\mathcal{L}(E)$. Vérifier que $\mathcal{C}(U)$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$, de dimension (en tant qu'espace vectoriel) supérieure ou égale à 1.

A.2

a Vérifier que $\mathcal{C}(u)$ contient $\mathbb{R}[u]$.

b Soit λ une valeur propre de u, et soit $v \in \mathcal{C}(u)$. Vérifier que $E_\lambda(u)$ est stable par v.

Partie B – Centre de $\mathcal{L}(E)$

B.1 On suppose que tout vecteur non nul de E est vecteur propre de u. Montrer que u est une homothétie, *i.e.* $u \in \mathbb{R}\,\mathrm{Id}_E$.

B.2 Soit U la partie de $\mathcal{L}(E)$ formée des projecteurs de E et $v \in \mathcal{C}(U)$. On se donne un vecteur non nul e de E et un supplémentaire G de $F = \mathrm{Vect}(e)$. En considérant le projecteur p sur F parallèlement à G, montrer que e est vecteur propre de v. En déduire que v est une homothétie, puis donner $\mathcal{C}(U)$.

B.3 Que vaut $\mathcal{C}(\mathcal{L}(E))$?

Partie C – Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, nous supposons que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, et nous notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les différentes valeurs propres de u, $E_1, \ldots, E_p$ les sous-espaces propres correspondants, et, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $r_i = \dim(E_i)$. Puisque u est diagonalisable, on a $n = \sum_{i \in [\![1,p]\!]} r_i$.

C.1 Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, E_i est stable par v.

C.2

a En déduire que $\dim(\mathcal{C}(u)) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2$.

b Montrer que $\dim(\mathcal{C}(u)) \geqslant n$, et que cette inégalité est une égalité si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.

C.3 Soit $\pi = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$.

a Montrer que $\pi(u) = 0$.

Indication : on pourra montrer que $\pi(u)$ est nul sur chaque sous-espace propre associé à u.

b En déduire que $\mathbb{R}[u] = \mathrm{Vect}(u^k)_{k \in [\![0,p-1]\!]}$.

c Soit x un vecteur propre pour une valeur propre λ de u, $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Vérifier que $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

d Montrer que $(u^k)_{k \in [\![0,p-1]\!]}$ est libre, puis en déduire que $\dim \mathbb{R}[u] = p$.

C.4 Montrer que $\mathcal{C}(u) = \mathbb{R}[u]$ si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.

Partie D – Centre du commutant d'un endomorphisme diagonalisable

On conserve les notations de la partie précédente. On note $\mathcal{C}_2(u)$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathcal{C}(u))$.

D.1 Vérifier que $\mathbb{R}[u] \subset \mathcal{C}_2(u) \subset \mathcal{C}(u)$.

D.2 Pour v dans $\mathcal{C}_2(u)$ et i dans $[\![1,p]\!]$, on note v_i l'endomorphisme de E_i induit par v, *i.e.* $v_i = v|_{E_i}^{E_i}$. Montrer que $v_i \in \mathcal{C}(\mathcal{L}(E_i))$. En déduire qu'il existe un réel μ_i tel que $v_i = \mu_i \mathrm{Id}_{E_i}$.

D.3 Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que : $\forall\, i \in [\![1,p]\!], Q(\lambda_i) = \mu_i$.

D.4 Montrer : $\mathcal{C}_2(u) = \mathbb{R}[u]$.