Corrigé de devoir non surveillé

Partie A – Préliminaires

A.1 $\mathcal{C}(U)$ est une partie de $\mathcal{L}(E)$, comprenant Id_E (donc non vide). Soit $v, w \in \mathcal{C}(U)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $u \in U$: on a

$$(\lambda v)u = \lambda(vu) = \lambda(uv) = u(\lambda v),$$

$$(v+w)u = vu + wu = uv + uw = u(v+w),$$

et

$$(vw)u = v(wu) = v(uw) = (vu)w = u(vw),$$

ce qui prouve que $\mathcal{C}(U)$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$. Comme $\mathcal{C}(U)$ contient $\mathbb{R}\,\mathrm{Id}_E$, il est de dimension supérieure ou égale à 1.

A.2

a $\mathcal{C}(u)$ est un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$ possédant u, il contient donc le plus petit d'entre eux, c'est-à-dire $\mathbb{R}[u]$.

b Soit $x \in E_\lambda(u)$: $u(x) = \lambda x$.
On a, puisque u et v commutent :

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x),$$

donc $v(x) \in E_\lambda(u)$: $E_\lambda(u)$ est stable par v.

Partie B – Centre de $\mathcal{L}(E)$

B.1 Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les réels tels que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ (pour tout $i \in [\![1, n]\!]$). Soit $i \in [\![2, n]\!]$. Par hypothèse, $e_1 + e_i$ est vecteur propre de u : soit $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(e_1 + e_i) = \mu(e_1 + e_i).$$

On a par ailleurs $u(e_1 + e_i) = u(e_1) + u(e_i) = \lambda_1 e_1 + \lambda_i e_i$, d'où, par liberté de (e_1, e_i) : $\lambda_i = \mu = \lambda_1$.

On a donc $u = \lambda_1 \mathrm{Id}_E$ (car ces endomorphismes coïncident sur une base).

B.2 $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ et $v \in \mathcal{C}(p)$, donc $v(F) \subset F$ (d'après A.2.b), puis $v(e) \in \mathbb{R}\, e$: e est vecteur propre de v.

Ceci valant pour tout vecteur non nul $e \in E$, d'après B.1, v est une homothétie. Ainsi, $\mathcal{C}(U) \subset \mathbb{R}\,\mathrm{Id}_E$. Comme l'inclusion réciproque est évidente, on a $\mathcal{C}(U) = \mathbb{R}\,\mathrm{Id}_E$.

B.3 D'après la question précédente, $\mathcal{C}(\mathcal{L}(E))$ est inclus dans $\mathbb{R}\,\mathrm{Id}_E$ (l'application $\mathcal{C} : U \subset \mathcal{L}(E) \mapsto \mathcal{C}(U)$ est décroissante pour l'inclusion), d'où, encore une fois, l'égalité.

Partie C – Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

C.1 Le sens direct est connu (d'après A.2.b). Réciproquement, supposons que E_i soit stable par v, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Comme u induit une homothétie sur E_i, $E_i \subset \mathrm{Ker}(vu - uv)$, puis $E = E_1 + \cdots + E_p \subset \mathrm{Ker}(vu - uv)$: $vu - uv = 0$, *i.e.* $v \in \mathcal{C}(u)$.

C.2

a $\mathcal{C}(u)$ est isomorphe, d'après la question précédente, à $\mathcal{L}(E_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_p)$, or $\dim(\mathcal{L}(E_i)) = r_i^2$, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, de sorte que $\dim(\mathcal{C}(u)) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2$.

b Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $r_i \in \mathbb{N}^*$, donc $r_i^2 \geqslant r_i$, puis

$$\dim(\mathcal{C}(u)) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{p} r_i = n.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $r_i = r_i^2$, *i.e.* $r_i = 1$, donc si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.

C.3

a Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Comme $u - \lambda_i \mathrm{Id}_E$ est nul sur E_i, et que π est multiple de $X - \lambda_i$, $\pi(u)$ est nul sur E_i. Ainsi, $\pi(u)$ est nul sur $E_1 + \cdots + E_p = E$, donc identiquement nul.

b L'inclusion indirecte est évidente. Réciproquement, soit $P \in \mathbb{R}[X]$. en effectuant la division euclidienne $\pi Q + R$ de P par π, on obtient

$$P(u) = \pi(u)Q(u) + R(u) = R(u),$$

où $\deg(R) \leqslant p-1$, donc $P(u) \in \mathrm{Vect}(u^k)_{k\in[\![0,p-1]\!]}$: $\mathbb{R}[u] = \mathrm{Vect}(u^k)_{k\in[\![0,p-1]\!]}$.

c $u(x) = \lambda x$, donc, par une récurrence immédiate, $u^k(x) = \lambda^k x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc

$$P(u)(x) = (\sum_{k=0}^{d} a_k X^k)(u)(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k x = P(\lambda)x.$$

d Supposons que $(u^k)_{k\in[\![0,p-1]\!]}$ soit liée, *i.e.* qu'il existe un polynôme non nul M de degré au plus $p-1$ tel que $M(u) = 0$. Ce polynôme admettant au plus $p-1$ racines, l'une des valeurs propres de u, mettons λ_i, n'en est pas racine. Soit x_i un vecteur propre de u pour λ_i. On a $M(u)(x_i) = M(\lambda_i)x_i \neq 0$, c'est absurde : $(u^k)_{k\in[\![0,p-1]\!]}$ soit libre, et donc également une base de $\mathbb{R}[u]$ en vertu de C.3.b : $\dim \mathbb{R}[u] = p$.

C.4 $\mathbb{R}[u]$ étant inclus dans $\mathcal{C}(u)$, ces sous-espaces sont égaux si et seulement si ils ont même dimension. Or $\mathbb{R}[u]$ est de dimension $p \leqslant n$, et $\mathcal{C}(u)$ est de dimension supérieure ou égale à n, avec égalité si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes : $\mathbb{R}[u] = \mathcal{C}(u)$ si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.

Partie D – Centre du commutant d'un endomorphisme diagonalisable

D.1 $\mathcal{C}_2(u)$ est un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$ comprenant u (u commute avec tout endomorphisme commutant avec u ...), il contient donc $\mathbb{R}[u]$.

Soit $w \in \mathcal{C}_2(u)$: w commute avec tout endomorphisme commutant avec u, donc avec u lui-même, d'où $w \in \mathcal{C}(u)$.

On a donc bien $\mathbb{R}[u] \subset \mathcal{C}_2(u) \subset \mathcal{C}(u)$.

D.2 v_i est bien défini car v commute avec u, et laisse donc stable chaque sous-espace propre pour u.

u induit une homothétie u_i sur E_i, donc $\mathcal{C}(u_i) = \mathcal{L}(E_i)$, or v_i appartient au centre de u_i, donc $v_i \in \mathcal{C}(\mathcal{L}(E_i))$. D'après B.3, c'est une homothétie, et il existe un réel μ_i tel que $v_i = \mu_i \mathrm{Id}_{E_i}$.

D.3 L'application

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{R}_{p-1}[X] & \to & \mathbb{R}^p \\ & Q & \mapsto & (Q(\lambda_i))_{i\in[\![1,p]\!]} \end{array}$$

est linéaire et injective (un polynôme non nul n'a pas plus de racines que son degré) entre espaces de même dimension finie : elle est donc bijective, et il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que : $\forall i \in [\![1,p]\!], Q(\lambda_i) = \mu_i$.

D.4 L'inclusion indirecte est connue. Réciproquement, soit $v \in \mathcal{C}_2(u)$. On vérifie aisément qu'avec les notations précédentes, $Q(u) = v$, donc $v \in \mathbb{R}[u]$, puis $\mathcal{C}_2(u) \subset \mathbb{R}[u]$.

Ainsi : $\mathcal{C}_2(u) = \mathbb{R}[u]$.