Devoir non surveillé

Polynômes de Chebychev (d'après E3A PC 2005)

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et par $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, pour tout entier naturel n.

Soit (T_n) la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$, puis la relation :

$$\forall n \geqslant 1, \quad T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

Partie A – Étude de la suite des polynômes (T_n)

A.1 Déterminer les polynômes T_2 et T_3.

A.2 Déterminer le degré, la parité et le coefficient dominant de T_m pour $m \in \mathbb{N}$.

A.3 Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

A.4

a Établir par récurrence les relations suivantes pour tout nombre réel x :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(\cos(x)) = \cos(nx) \quad \text{et} \quad T_n(\operatorname{ch}(x)) = \operatorname{ch}(nx).$$

On rappelle que pour tous réels a et b : $2\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) = \operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)$.

b En déduire que $|T_n(u)| \leqslant 1$ pour $|u| \leqslant 1$.

c Soit n un entier naturel non nul. Montrer que, pour tout u dans $]1, +\infty[$, $|T_n(u)| > 1$ (on pourra poser $u = \operatorname{ch}(x)$).

d En déduire que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout u dans $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $|T_n(u)| > 1$.

A.5

a Pour tout entier naturel non nul n, résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $T_n(\cos(x)) = 0$.

b En déduire que pour tout entier naturel non nul, T_n a n racines réelles dans $[-1, 1]$.

c Soit n un entier naturel non nul. Donner la décomposition de T_n en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Dans toute la suite, on désigne par n un entier naturel non nul et les n racines de T_n par $\cos(x_1)$, $\cos(x_2)$, $\ldots$, $\cos(x_n)$ où :

$$x_k = \frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k \in [\![1, n]\!].$$

Partie B – Étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

On associe à tout couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ l'intégrale suivante :

$$< P, Q >= \int_0^\pi P(\cos(x))Q(\cos(x))\mathrm{d}x.$$

B.1 Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto < P, Q >$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

B.2

a Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \neq q$. Calculer $< T_p, T_q >$.

b Calculer $< T_0, T_0 >$ et $< T_n, T_n >$.

c En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

d En utilisant les questions A.2, B.2.b et B.2.c, montrer que $< T_n, X^n >= \frac{\pi}{2^n}$.

B.3 Montrer que la famille $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie C – Calcul exact d'une intégrale

On associe à tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ l'intégrale et la somme suivantes :

$$I(P) = \int_0^\pi P(\cos(x))\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad S_n(P) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n P(\cos(x_k)).$$

C.1 On note, pour $j \in [\![0, n]\!]$, $c_j = \sum_{k=1}^n \cos(jx_k)$.

a Calculer c_0.

b Calculer pour $j \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\sum_{k=1}^n \left(e^{ij\frac{\pi}{n}}\right)^k.$$

c En déduire que, pour $j \in [\![1, n-1]\!]$, $c_j = 0$.

C.2

a Pour $p \in [\![0, n-1]\!]$, calculer $I(T_p)$ et $S_n(T_p)$.

b En déduire que, pour tout P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $I(P) = S_n(P)$.

C.3 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On note Q et R respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de P par T_n ; on a donc $P = QT_n + R$ où $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

a Montrer que $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b En déduire, en utilisant B.2.c, que $I(P) = I(R)$.

c En déduire que, pour $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $I(P) = S_n(P)$.

C.4 Calculer $I(T_{2n})$ et $S_n(T_{2n})$; qu'en conclut-on ?

Partie D – Calcul approché d'une intégrale

On associe à toute fonction continue $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ l'intégrale et la somme suivantes :

$$I(f) = \int_0^\pi f(\cos(x))\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad S_n(f) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n f(\cos(x_k)).$$

D.1 Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = I(f)$.

D.2 On suppose que f est l'application définie par $f(t) = \ln(a^2 - 2at + 1)$, où a est un réel tel que : $a > 0$ et $a \neq 1$.

a Montrer que f est continue sur $[-1, 1]$ et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = I(f)$.

b

1. Exprimer les racines $(2n)^{emes}$ de -1 dans $\mathbb{C}$ en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ (on pourra les classer par conjugués).
2. Donner la factorisation en irréductibles de $X^{2n} + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
3. En déduire que la factorisation en irréductibles de $X^{2n} + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$X^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^n (X^2 - 2\cos(x_k)X + 1).$$

4. Montrer que : $S_n(f) = \frac{\pi}{n}\ln(a^{2n} + 1)$.

c Donner la limite de $\frac{\pi}{n}\ln(a^{2n}+1)$ quand n tend vers $+\infty$ (on distinguera les cas : $a \in]0, 1[$, $a \in]1, +\infty[$). En déduire la valeur $I(f)$ selon la valeur de a.

d Donner un équivalent de $S_n(f) - I(f)$ quand n tend vers $+\infty$, en distinguant les cas $0 < a < 1$ et $a > 1$.