Corrigé de devoir non surveillé

Polynômes de Chebychev (d'après E3A PC 2005)

Partie A – Étude de la suite des polynômes (T_n)

A.1 $\boxed{T_2(X) = 2X^2 - 1}$ et $\boxed{T_3(X) = 4X^3 - 3X.}$

A.2 Montrons par récurrence sur m que $\boxed{T_m \text{ est de degré } m, \text{ de coefficient dominant } 2^{m-1} \text{ si } m \geq 1}$ et vérifiant de plus $T_m(-X) = (-1)^m T_m(X)$, ce qui entraîne que $\boxed{T_m \text{ a la parité de } m}$. C'est vérifié pour $m = 1$ et $m = 2$. Soit $m \geqslant 2$. Supposons la propriété vraie pour $m-1$ et m. De $T_{m+1}(X) = 2XT_m(X) - T_{m-1}(X)$ on déduit, puisque $\deg(T_{m-1}) = m - 1 < m + 1 = \deg(XT_m)$, que T_{m+1} est de degré $m+1$ et que son coefficient dominant est 2^m. De plus, $T_{m+1}(-X) = -2XT_m(-X) - T_{m-1}(-X) = (-1)^{m+1}T_{m+1}(X)$. La propriété est vraie au rang $m+1$, elle est donc vraie pour tout m.

A.3 La famille $(T_0, T_1, ..., T_n)$ est une famille libre (car à degrés échelonnés) de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$: $\boxed{(T_0, T_1, ..., T_n) \text{ est donc une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

A.4

a On montre par récurrence sur n que $\boxed{T_n(\cos x) = \cos(nx)}$ (pour tout réel x). C'est vérifié pour $n = 0$ et $n = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie pour $n-1$ et n. De $\cos(nx+x) + \cos(nx-x) = 2\cos(nx)\cos(x)$ on déduit $\cos(nx+x) = 2\cos(x)T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x)$ d'où $\cos(nx+x) = T_{n+1}(\cos x)$. La propriété est vraie pour $n+1$, elle est donc vraie pour tout n. La propriété $\boxed{T_n(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch}(nx)}$ (pour tout réel x) se démontre de la même façon en remplaçant cos par ch.

b Si $|u| \leq 1$ il existe x tel que $u = \cos(x)$ donc $|T_n(u)| = |T_n(\cos x)| = |\cos(nx)| \leq 1$: $\boxed{|T_n(u)| \leqslant 1.}$

c Si $u > 1$ il existe $x > 0$ tel que $u = \operatorname{ch}(x)$ donc $|T_n(u)| = |T_n(\operatorname{ch}(x))| = \operatorname{ch}(nx) > 1$ puisque $nx > 0$: $\boxed{|T_n(u)| > 1.}$

d Si $u < -1$, $-u > 1$ donc $|T_n(u)| = |(-1)^n T_n(-u)| = |T_n(-u)| > 1$: $\boxed{|T_n(u)| > 1.}$

A.5

a Soit $x \in [0, \pi]$.
$T_n(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + [\pi] \Leftrightarrow x \Leftrightarrow \frac{\pi}{2n} + [\frac{\pi}{n}]$.
$\boxed{x \in [0, \pi] \text{ vérifie donc } T_n(\cos(x)) = 0 \text{ si et seulement si il existe } k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tel que } x = \frac{2k+1}{2n}\pi.}$

b Les nombres $\cos(\frac{2k+1}{2n}\pi)$ pour $0 \leq k \leq n-1$ sont distincts deux à deux et compris entre -1 et 1 puisque cos est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. $\boxed{T_n \text{ a donc } n \text{ racines distinctes dans } [-1, 1]}$. Il n'a pas d'autres racines puisqu'il est de degré n.

c $\boxed{T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right).}$

Partie B – Étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

B.1 L'application qui à (P, Q) associe $< P, Q >= \int_0^\pi P(\cos x)Q(\cos x)\mathrm{d}x$ est clairement une forme bilinéaire symétrique. Elle est positive car $< P, P >= \int_0^\pi (P(\cos x))^2 \mathrm{d}x \geq 0$. Elle est définie puisque $< P, P >= \int_0^\pi (P(\cos x))^2 \mathrm{d}x = 0$ entraîne par continuité de P et cos que $P(\cos x) = 0$ sur $[0, \pi]$; P a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

$\boxed{\text{L'application considérée définit donc bien un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$

B.2

a $\boxed{< T_p, T_q >= 0.}$ En effet, on peut écrire puisque $p \neq q$ et $p \neq -q$:

$$\begin{aligned} < T_p, T_q > &= \int_0^\pi T_p(\cos x) T_q(\cos x) \mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((p+q)x) + \cos((p-q)x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p+q)x)}{p+q} + \frac{\sin((p-q)x)}{p-q}\right]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

b $< T_0, T_0 >= \pi$ et pour $n \geq 1$:
$< T_n, T_n >= \int_0^\pi (\cos(nx))^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(2nx)+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2nx)}{2n} + x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$.
$\boxed{< T_0, T_0 >= \pi \text{ et } < T_n, T_n >= \frac{\pi}{2}.}$

c T_n est orthogonal à tous les polynômes T_k pour $0 \leq k \leq n-1$ qui forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\boxed{\text{il est donc orthogonal à ce sous-espace.}}$

d Pour $n \geq 1$, $T_n = 2^{n-1}X^n + Q$ avec $\deg(Q) \leq n-1$; Q est donc orthogonal à T_n et par suite $< T_n, T_n >=< T_n, 2^{n-1}X^n >$ d'où $< T_n, X^n >= \frac{1}{2^{n-1}} < T_n, T_n >= \frac{\pi}{2^n}$. C'est vrai aussi pour $n = 0$ car $< T_0, 1 >= \pi$.
$\boxed{< T_n, X^n >= \frac{\pi}{2^n}.}$

B.3 $\boxed{\text{La base } (T_0, T_1, ..., T_n) \text{ est orthogonale}}$ puisque $< T_p, T_q >= 0$ si $p \neq q$.

Partie C – Calcul exact d'une intégrale

C.1

a $\boxed{c_0 = \sum_{k=1}^n 1 = n.}$

b $\boxed{\sum_{k=1}^n (e^{ij\frac{\pi}{n}})^k = e^{ij\frac{\pi}{n}} \frac{1-e^{ij\pi}}{1-e^{ij\frac{\pi}{n}}} = e^{ij\frac{\pi}{n}} \frac{1-(-1)^j}{1-e^{ij\frac{\pi}{n}}}}$ puisque $e^{ij\frac{\pi}{n}} \neq 1$ pour $1 \leq j \leq n-1$.

c c_j est la partie réelle de $\sum_{k=1}^n e^{ijx_k} = e^{-ij\frac{\pi}{2n}} \sum_{k=1}^n e^{ijk\frac{\pi}{n}} = e^{ij\frac{\pi}{2n}} \frac{1-(-1)^j}{1-e^{ij\frac{\pi}{n}}} = \frac{1-(-1)^j}{e^{-ij\frac{\pi}{2n}} - e^{ij\frac{\pi}{2n}}} = \frac{1-(-1)^j}{-2i\sin\frac{j\pi}{2n}}$ qui est imaginaire pur, donc $\boxed{c_j = 0.}$

C.2

a $I(T_p) =< T_p, T_0 >= \pi$ si $p = 0$ et 0 si $p > 0$.
$S_n(T_p) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n T_p(\cos(x_k)) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n \cos(px_k) = \frac{\pi}{n}c_p$ d'où $S_n(T_p) = \pi$ si $p = 0$ et 0 si $0 < p \leq n-1$. On a donc pour tout $p \in \{0, .., n-1\}$, $\boxed{I(T_p) = S_n(T_p).}$

b I et S_n sont clairement des formes linéaires sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$; comme elles coincident sur la base $(T_0, T_1, ..., T_{n-1})$, $\boxed{\text{elles sont égales.}}$

C.3

a Si $Q \neq 0$, $\deg(QT_n) \geq n$ alors que $\deg(R) \leq n-1$; par suite, $\deg(QT_n) = \deg(P) \leq 2n-1$ donc $\boxed{\deg(Q) \leq n-1.}$

b $I(P) = I(QT_n) + I(R) =< Q, T_n > + I(R) = 0 + I(R) = I(R)$ car T_n est orthogonal à Q : $\boxed{I(P) = I(R).}$

c $S_n(P) = S_n(QT_n) + S_n(R)$ avec $S_n(QT_n) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n Q(\cos(x_k))T_n(\cos(x_k)) = 0$ puisque les $\cos(x_k)$ sont les racines de T_n. On a donc $S_n(P) = S_n(R)$ d'où pour $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $I(P) = I(R) = S_n(R) = S_n(P)$ (car $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$) : $\boxed{I(P) = S_n(P).}$

C.4 $I(T_{2n}) =< T_{2n}, T_0 >= 0$ car $n \geq 1$.
$S_n(T_{2n}) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n T_{2n}(\cos(x_k)) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n \cos(2nx_k) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n (-1) = -\pi$.
On en déduit que $\boxed{I(P) = S_n(P) \text{ n'est pas vérifié pour un polynôme de degré } 2n.}$

Partie D – Calcul approché d'une intégrale

D.1 On choisit $a = 0$, $b = \pi$ et la fonction $f \circ \cos$ qui est continue sur $[0, \pi]$. Avec $p = n$ et $c_k = x_{k+1} = \frac{2k+1}{2n}\pi \in [\frac{k}{n}\pi, \frac{k+1}{n}\pi]$ on obtient par le théorème des sommes de Riemann : $\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty} S_n(f) = \int_0^\pi f(\cos t)\mathrm{d}t = I(f).}$

D.2

a $f(t) = \ln((a-t)^2 + 1 - t^2)$ avec $(a-t)^2 \geq 0$ et $1 - t^2 > 0$ pour $t \in]-1,1[$; pour $t = 1$, $(a-1)^2 > 0$ et pour $t = -1$, $(a+1)^2 > 0$. f est donc définie sur $[-1,1]$ et continue par continuité de ln. $\boxed{\text{On peut donc appliquer le résultat du D.1.}}$

b

1. $z^{2n} = -1 \Leftrightarrow z = e^{(2k-1)i\frac{\pi}{2n}} = z_k$ avec $1 \leq k \leq 2n$. Puisque $\bar{z}_k = e^{-(2k-1)i\frac{\pi}{2n}} = e^{((4n-2k+1)i\frac{\pi}{2n}} = z_{2n-k+1}$ on déduit $\bar{z}_1 = z_{2n}$, ..., $\bar{z}_n = z_{n+1}$ donc les racines $(2n)^{\text{èmes}}$ de -1 sont : $\boxed{e^{ix_1}, e^{ix_2}, ..., e^{ix_n}, e^{-ix_1}, e^{-ix_2}, ..., e^{-ix_n}.}$
2. $\boxed{X^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^n \left((X - e^{ix_k})(X - e^{-ix_k})\right).}$
3. $(X - e^{ix_k})(X - e^{-ix_k}) = X^2 - 2\cos(x_k)X + 1$ est un polynôme irréductible sur $\mathbb{R}[X]$ car ses racines e^{ix_k} et e^{-ix_k} ne sont pas réelles puisque $x_k \notin \pi\mathbb{Z}$. $\boxed{\text{On obtient bien la factorisation proposée.}}$
4. $S_n(f) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n \ln(a^2 - 2a\cos(x_k) + 1) = \frac{\pi}{n}\ln\prod_{k=1}^n (a^2 - 2a\cos(x_k) + 1) = \boxed{\dfrac{\pi}{n}\ln(a^{2n} + 1).}$

c Si $a \in]0,1[$, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} a^{2n} = 0$ d'où $I(f) = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n(f) = 0$. Si $a > 1$, $S_n(f) = \frac{\pi}{n}\ln(a^{2n}(1 + \frac{1}{a^{2n}})) = 2\pi\ln a + \frac{\pi}{n}\ln(1 + \frac{1}{a^{2n}})$. On en déduit $I(f) = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n(f) = 2\pi\ln a$.

$\boxed{\text{Si } a \in]0,1[\text{ (resp. si } a > 1\text{), alors } I(f) = 0 \text{ (resp. } I(f) = 2\pi\ln(a)\text{).}}$

d Si $a \in]0,1[$, $S_n(f) - I(f) = S_n(f) \sim \frac{\pi}{n}a^{2n}$ puisque $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0. Si $a > 1$, $S_n(f) - I(f) = \frac{\pi}{n}\ln(1 + \frac{1}{a^{2n}}) \sim \frac{\pi}{na^{2n}}$.

$\boxed{\text{Si } a \in]0,1[\text{ (resp. } a > 1\text{), alors } S_n(f) - I(f) \sim \frac{\pi}{n}a^{2n} \text{ (resp. } S_n(f) - I(f) \sim \frac{\pi}{na^{2n}}\text{).}}$