Devoir non surveillé

Dans ce problème, sauf mention contraire, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définitions et rappels (qu'il est inutile de montrer).

- $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique.
- Les produits scalaires seront notés $< \cdot, \cdot >$ et la norme associée sera notée $\|\cdot\|$. Il incombe au lecteur de comprendre, selon le contexte, de quel produit scalaire ou norme on parle.
- On pourra identifier $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$.
- Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle *trace* de A et on note $\operatorname{tr}(A)$ le scalaire $\sum_{i=1}^n a_{i,i}$. On rappelle que la trace (vue comme application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, clairement invariante par transposition (*i.e.* $\operatorname{tr}({}^tA) = \operatorname{tr}(A)$ pour toute matrice carrée) et que pour toutes matrices B et C de tailles respectives $n \times m$ et $m \times n$, $\operatorname{tr}(BC) = \operatorname{tr}(CB)$.
- On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de taille n, $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ le sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant positif, et $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ son complémentaire dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- On appelle *valeur propre* d'un endomorphisme w d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tout scalaire λ tel que $w - \lambda \mathrm{Id}_E$ ne soit pas injectif, *i.e.* tel qu'il existe un vecteur non nul x de E pour lequel $w(x) = \lambda x$. Un tel vecteur est appelé *vecteur propre* de w pour la valeur propre λ.
- On définit de même la notion de *valeur propre* d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: c'est un scalaire λ tel que $A - \lambda I_n$ ne soit pas inversible, *i.e.* tel qu'il existe une matrice colonne non nulle X pour laquelle $AX = \lambda X$. On observe que λ est valeur propre de A si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$. De plus, les valeurs propres d'une matrice sont celles de tout endomorphisme qu'elle est susceptible de représenter dans une base. En particulier, deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres.

La notion principalement étudiée dans ce problème

On se donne des vecteurs $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_m$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note X et Y les matrices de tailles $n \times m$, de colonnes respectives $X_1, \dots, X_m$ et $Y_1, \dots, Y_m$.

Soit Ω une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dira qu'une matrice $W \in \Omega$ est (X, Y)-*minimale dans* Ω si elle minimise dans Ω la quantité

$$\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|^2,$$

i.e. si

$$\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|^2 = \min\left\{\sum_{i=1}^m \|W'X_i - Y_i\|^2, \quad W' \in \Omega\right\},$$

ou encore

$$\forall\, W' \in \Omega, \quad \sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^m \|W'X_i - Y_i\|^2.$$

Le but de ce problème est la recherche des matrices (X, Y)-minimales dans $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$.

Partie A – Généralités

A.1

a Montrer que pour tout $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $W \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$), $\det(W) = 1$ (resp. $\det(W) = -1$). $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ est-il un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?

b Montrer que pour tout $W = (w_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, et tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$: $|w_{i,j}| \leqslant 1$.

A.2

a Montrer que l'application

$$< \cdot,\cdot > : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})^2 & \to & \mathbb{R} \\ (M,N) & \mapsto & \mathrm{tr}(({}^tM)N) \end{array}$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, pour lequel la base canonique $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m}$ de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est orthonormée. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

b Soit $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\|W\|$.

A.3 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M admet au moins une valeur propre complexe.

Partie B – Traduction du problème à l'aide du produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

B.1

a Soit $W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{m} \|WX_i - Y_i\|^2 = \|WX - Y\|^2 .$$

b Soit $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $(M,N) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})^2$. Simplifier $< WM, WN >$ et $\|WM\|$.

c Faire de même pour $< MW, NW >$ et $\|MW\|$, où $W \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$, $(M,N) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})^2$.

B.2 Soit Ω une partie de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

a Montrer que $W \in \Omega$ est (X,Y)-minimale dans Ω si et seulement si W maximise $< WX, Y >$ dans Ω, *i.e.*

$$\forall W' \in \Omega, \quad < W'X, Y > \leqslant < WX, Y > .$$

b Déterminer, en fonction de X et de Y, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$:

$$< WX, Y > = < W, A > .$$

Ainsi, W est (X,Y)-minimale dans Ω si et seulement si W maximise $< W, A >$ dans Ω.

Partie C – Trace maximale d'une matrice orthogonale négative

C.1 Donner la trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, en précisant la ou les matrices pour lesquelles elle est atteinte.

C.2 Soit E un espace euclidien, et w un automorphisme orthogonal de E. Justifier que les seules valeurs propres (réelles) possibles de w sont 1 et -1.

C.3 Montrer que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E, stable par un automorphisme orthogonal w de E (*i.e.* $w(F) \subset F$), alors $F^\perp$ est également stable par w.

C.4 Soit $W \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$, et w l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé. On se propose de montrer, par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$, que -1 est valeur propre de W. Le cas où $n = 1$ est évident.

a Traiter le cas $n = 2$.

On prouve maintenant l'hérédité, en supposant avoir prouvé le résultat pour toute taille $m < n$, où l'on a fixé un entier $n \geqslant 3$.

On sait que W admet une valeur propre complexe λ. Si $\lambda = -1$, il n'y a rien à faire.

b Traiter le cas où $\lambda = 1$.

c On suppose λ complexe non réel. Soit $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $WZ = \lambda Z$. Notons $Z_r = \mathrm{Re}(Z)$ et $Z_i = \mathrm{Im}(Z)$ (que l'on pourra voir comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$). Montrer que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(Z_r, Z_i)$ est stable par w.

d Conclure.

C.5

a Montrer que pour tout $W \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $W' \in \mathcal{O}_{n-1}^+(\mathbb{R})$ tels que

$$W = P \begin{pmatrix} -1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & W' \end{pmatrix} P^{-1}.$$

b En déduire la trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.

Partie D – Réponse au problème

D.1 Ici, $\Delta = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ désigne une matrice diagonale de taille n à coefficients positifs ou nuls.

a Déterminer une matrice $W' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ maximisant $< W', \Delta >$ dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

b On suppose de plus $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > 0$ et $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ pour tout $i \in [\![r+1, n]\!]$ (on comprend ici le cas $r = n$, où les coefficients diagonaux de Δ sont tous non nuls).

Déterminer toutes les matrices $W' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ maximisant $< W', \Delta >$ dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

D.2 On admet que A peut s'écrire $Q\Delta({}^tP)$, où $(Q, P) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$ et Δ est diagonale à coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifiant $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$.

a Déterminer à l'aide de P et de Q une matrice (X, Y)-minimale dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, et appartenant à $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\det(P)\det(Q) > 0$.

b Montrer que si $\det(A) > 0$, alors il existe une unique matrice (X, Y)-minimale dans $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$.

c Montrer que si $\det(A) = 0$, alors il existe une matrice orthogonale positive (X, Y)-minimale dans $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ (on pourra discuter selon le signe de $\det(P)\det(Q)$).

D.3 On traite ici le dernier cas, où $\det(A) < 0$ (et donc $\det(P)\det(Q) < 0$).

a Montrer que la matrice diagonale $W' \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$, de taille n dont tous les coefficients diagonaux valent 1, sauf le dernier, qui vaut -1, maximise $< W', \Delta >$ dans $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.

Indication : on pourra, étant donné $W' = (w'_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$, écrire $< W', \Delta >$ à l'aide de $\mathrm{tr}(W')$ et des coefficients $w'_{i,i}$, où $i \in [\![1, n-1]\!]$.

b En déduire, dans ce dernier cas, une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$, (X, Y)-minimale dans $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$.