Corrigé de devoir non surveillé

Partie A – Généralités

A.1

a Vu en cours : si $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, *i.e.* ${}^tWW = I_n$, alors, en prenant le déterminant, $\det(W)^2 = 1$, d'où $\det(W) \in \{-1, +1\}$, puis la première partie de la question.

$\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ ne comprenant pas I_n, ce n'est pas un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ [1].

b Pour de tels W, i, j, on a $\sum_{k=1} w_{i,k}^2 = 1$ (la i-ème ligne de W est unitaire), d'où *a fortiori* $w_{i,j}^2 \leqslant 1$, puis $|w_{i,j}| \leqslant 1$.

A.2

a Soit $M = (m_{i,j}), N = (n_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Cette application est clairement une forme bilinéaire, symétrique car $\mathrm{tr}(({}^tM)N) = \mathrm{tr}({}^t(({}^tM)N)) = \mathrm{tr}(({}^tN)M)$. De plus, $< M, M >= \sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} m_{i,j}^2 \geqslant 0$, et, si $< M, M >= 0$, alors chaque terme de cette somme nulle à termes positifs est nul, donc M est nulle.

Il s'agit donc bien d'un produit scalaire.

De plus, on a clairement $< M, N >= \sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} m_{i,j}n_{i,j}$, d'où le caractère orthonormé de la base canonique pour ce produit scalaire.

b $\|W\| = \sqrt{< W, W >} = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tWW)} = \sqrt{\mathrm{tr}(I_n)} = \sqrt{n}$.

A.3 L'application $\lambda \mapsto \det(M - \lambda I_n)$ est clairement polynomiale, de degré n (l'expression sommatoire du déterminant montre même qu'elle est de coefficient dominant $(-1)^n$). D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, elle admet un zéro complexe, donc M admet une valeur propre complexe.

Partie B – Traduction du problème à l'aide du produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

B.1

a Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $\|M\|^2$ est la somme des carrés des coefficients de M : en regroupant ceux de même second indice, on en déduit que $\|M\|^2$ est la somme des carrés des normes de ses colonnes. En particulier, pour $M = WX - Y$:

$$\sum_{i=1}^{m} \|WX_i - Y_i\|^2 = \|WX - Y\|^2 .$$

b $< WM, WN >= \mathrm{tr}({}^t(WM)WN)) = \mathrm{tr}(({}^tM)({}^tW)WN) = \mathrm{tr}(({}^tM)N) =< M, N >$. En particulier, en prenant $M = N$, $\|WM\| = \|M\|$.

c $< MW, NW >= \mathrm{tr}({}^t(MW)NW) = \mathrm{tr}({}^tW{}^tMNW) = \mathrm{tr}({}^tMNW{}^tW) = \mathrm{tr}({}^tMN) =< M, N >$, puis, comme ci-dessus, $\|MW\| = \|M\|$.

B.2

a $\|WX - Y\|^2 =< WX - Y, WX - Y >= \|WX\|^2 - 2 < WX, Y > + \|Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2 < WX, Y >$, d'où le résultat.

b $< WX, Y >= \mathrm{tr}({}^t(WX)Y) = \mathrm{tr}(({}^tX)({}^tW)Y) = \mathrm{tr}(({}^tW)Y({}^tX))$, donc le choix $A = Y({}^tX)$ convient.

Partie C – Trace maximale d'une matrice orthogonale négative

C.1 Soit $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. D'après A.1.b, $\mathrm{tr}(W) \leqslant n$, et, cette valeur étant atteinte pour $W = I_n (\in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$, n est la trace maximale d'une matrice orthogonale. Comme $\mathrm{tr}(W) =< W, I_n >$, et que $\|W\| = \|I_n\| = \sqrt{n}$, le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que cette valeur ne peut être atteinte qu'en W positivement colinéaire à I_n, et donc qu'en I_n.

C.2 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre d'un automorphisme orthogonal w d'un espace euclidien E, et soit $x \in E$ un vecteur propre associé. Comme w conserve la norme,

$$\|x\| = \|w(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| ,$$

1. d'ailleurs, pour cette raison, le complémentaire d'un sous-groupe dans un groupe G n'est jamais un sous-groupe de G

donc $|\lambda| = 1$ puisque x est non nul : les seules valeurs propres réelles possibles de w sont 1 et -1.

C.3 Supposons que F soit stable par $w \in O(E)$. w étant un automorphisme, $w(F)$ et F ont même dimension (finie), donc l'inclusion $w(F) \subset F$ est une égalité, d'où $w^{-1}(F) = F$.

Soit $y \in F^\perp$, $x \in F$. On a $w^{-1}(x) \in F$, donc $< y, w^{-1}(x) >= 0$, puis, w conservant le produit scalaire : $< w(y), x >= 0$. Ceci valant pour tout $x \in F$, $w(y) \in F^\perp$, donc $F^\perp$ est également stable (et même globalement invariant) par w.

C.4

a D'après le cours, tout élément W de $\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$ est une matrice de réflexion, et admet donc, en tant que telle, -1 pour valeur propre.

b On suppose que 1 est valeur propre de W. Soit x un vecteur propre de w associé à 1. En particulier, w étant orthogonal (puisque représenté par une matrice orthogonale dans une base orthonormée), $(\mathbb{R}x)^\perp$ est un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$, stable par w. Comme w induit sur H un automorphisme orthogonal négatif w' (car $\det(w') = \det(w)$), l'hypothèse de récurrence permet de dire que w', donc w, admet -1 pour valeur propre.

c Soit $\lambda_r + i\lambda_i$ la forme algébrique de λ. On a $WZ = \lambda Z$, d'où, en prenant les parties réelles, puis les parties imaginaires (et sachant que W est à coefficients réels) :

$$WZ_r = \lambda_r Z_r - \lambda_i Z_i \quad \text{et} \quad WZ_i = \lambda_r Z_i + \lambda_i Z_r,$$

donc, en passant à l'endomorphisme w, $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(Z_r, Z_i)$ est stable par w.

d F et $F^\perp$ sont deux sous-espaces vectoriels non triviaux de $\mathbb{R}^n$, stables par l'automorphisme orthogonal w. w induit deux automorphismes orthogonaux sur ces sous-espaces, qui, s'ils étaient positifs, feraient de w un automorphisme orthogonal positif (travailler dans une base adaptée à la supplémentarité de F et $F^\perp$ et prendre le déterminant) : l'un d'entre eux est négatif, d'où le résultat en lui appliquant l'hypothèse de récurrence. Dans tous les cas, l'hérédité est montrée.

C.5

a Soit e_1 un vecteur propre de w associé à la valeur propre -1. Quitte à le normaliser, on peut supposer e_1 unitaire. Soit $G = (\mathbb{R}e_1)^\perp$, et soit $(e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de G. La base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée, donc la matrice P de passage de la base canonique (orthonormée) de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$ est orthogonale. De plus, w induit un automorphisme orthogonal sur G, et, si on note $W_{\mathcal{B}}$ la matrice de w dans $\mathcal{B}$, on a

$$W_{\mathcal{B}} = P^{-1}WP,$$

donc $W = PW_{\mathcal{B}}P^{-1}$. On conclut en observant que $W_{\mathcal{B}}$ est bien de la forme souhaitée : en effet, W' est orthogonale car représentant un automorphisme orthogonal dans une base orthonormée, et de déterminant positif en égalant les déterminants ci-dessus.

b D'après la question précédente, et C.1, une matrice W de $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ est de trace au plus $n-2$, trace que l'on obtient pour $\mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, -1) \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$: $n-2$ est donc le nombre cherché.

Partie D – Réponse au problème

D.1

a Notons $d_{i,j}$ le terme général de Δ. Soit $W' = (w'_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a

$$< W', \Delta >= \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} w'_{i,j} d_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} w'_{i,i}\lambda_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

en vertu de A.1.b. Cette valeur, la trace de Δ, est atteinte pour $W' = I_n$, qui maximise donc $< W', \Delta >$ dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

b On a, en conservant les notations de la question précédente, $< W', \Delta >= \sum_{i=1}^{r} w'_{i,i}\lambda_i$, qui vaut $\mathrm{tr}(\Delta)$ si et seulement si $w'_{i,i} = 1$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$: les matrices maximisant $< W', \Delta >$ dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sont celles dont les r premières colonnes sont celles de I_n.

D.2

a Une matrice $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est (X, Y)-minimale si et seulement si $< W, A >$ est maximal dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, or

$$< W, A >=< W, Q\Delta({}^tP) >= \mathrm{tr}(({}^tW)Q\Delta({}^tP)) = \mathrm{tr}(({}^tP)({}^tW)Q\Delta) = \mathrm{tr}({}^t(({}^tQ)WP)\Delta),$$

donc W tel que $({}^tQ)WP = I_n$ maximise $< W, A >$: le choix $W = Q({}^tP)$ (qui est bien une matrice orthogonale) convient donc.

De plus, $Q({}^tP)$ appartient bien à $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\det(P)\det(Q) > 0$.

b Si $\det(A) > 0$, *i.e.* si $\det(P)\det(Q) > 0$, alors l'unique choix possible pour W à la question précédente est celui que nous avons donné (grâce à D.1.b), qui est bien orthogonale positive, d'où l'existence et l'unicité d'une unique matrice (X, Y)-minimale dans $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$.

c Supposons $\det(A) = 0$.

Si $\det(P)\det(Q) > 0$, alors le choix effectué en D.2.a convient (il fournit une matrice orthogonale positive).

Si $\det(P)\det(Q) < 0$, alors on peut prendre, dans D.2.a, la matrice $Q\,\mathrm{Diag}(1, \dots, 1, -1)({}^tP)$. Cette matrice est bien orthogonale positive.

Dans tous les cas, il existe une matrice orthogonale positive (X, Y)-minimale dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

D.3

a Soit $W' = (w'_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
< W', \Delta > &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i w'_{i,i} + \lambda_n w'_{n,n} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i w'_{i,i} + \lambda_n \left(\mathrm{tr}(W') - \sum_{i=1}^{n-1} w'_{i,i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_n) w'_{i,i} + \lambda_n \,\mathrm{tr}(W') \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_n) + \lambda_n \,\mathrm{tr}(W') \quad \text{(grâce à A.1.b et la décroissance de } (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_n) + \lambda_n (n-2) \quad \text{(grâce à C.5.b)} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i - \lambda_n
\end{aligned}$$

La matrice de l'énoncé fournissant un cas d'égalité, elle maximise bien $< W', \Delta >$ dans $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.

b En conservant les notations de la question précédente, la matrice $({}^tQ)W'P$ convient alors.