Corrigé de devoir non surveillé

Convergence d'un produit

Partie A – Découverte

A.1 Supposons que (p_n) converge : soit $l \in \mathbb{R}^*$ sa limite. Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = p_n/p_{n-1}$, donc la suite (u_n) converge vers 1.

A.2 Par une récurrence immédiate, on montre que pour tout entier naturel non nul n, $p_n = n+1$, de sorte que le produit (p_n) diverge (vers $+\infty$).

Partie B – Une caractérisation de la convergence d'une suite produit

B.1 La suite (u_n) convergeant vers le réel strictement positif 1, elle est à termes strictement positifs à partir d'un certain rang (et même minorée par un réel strictement positif à partir d'un certain rang).

B.2 Pour tout entier naturel $n \geqslant N$, on a $S_n = \ln\left(\prod_{k=N}^{n} u_k\right) = \ln(p_n/p_{N-1})$, où l'on a posé $p_{-1} = 1$ si $N = 0$.

Si la suite produit (p_n) converge vers un réel non nul l, alors (p_n/p_{N-1}) converge vers l/p_{N-1}, réel strictement positif car non nul et limite d'une suite de réels positifs : la suite (S_n) converge vers $\ln(l/p_{N-1})$.

Si, réciproquement, la suite (S_n) converge vers un réel l', alors, en observant que pour tout entier $n \geqslant N$,

$$p_n = p_{N-1}\exp(S_n),$$

on constate que la suite produit (p_n) converge vers le réel non nul $p_{N-1}\exp(l')$.

Ainsi l'équivalence voulue est-elle établie.

B.3

a La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est décroissante sur $[3, +\infty[$ (par étude de sa dérivée), d'où le résultat voulu, en intégrant cette fonction sur $[p, p+1]$ (où p est un entier fixé supérieur ou égal à 3).

b La suite (u_n), de terme général $\exp(\ln(n)/n)$, converge bien vers 1, on peut donc lui appliquer le critère établi ci-dessus. Pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :

$$S_n = \sum_{p=3}^{n} \ln(u_p) \geqslant \sum_{p=3}^{n} \int_p^{p+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t \geqslant \int_1^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\ln(n+1)^2}{2}.$$

Comme $(\ln(n+1)^2/2)$ diverge vers $+\infty$, il en est de même pour (S_n) : la suite produit (p_n) diverge.

Partie C – Un autre critère de convergence d'une suite produit

C.1 La fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$ est dérivable sur cet intervalle, de dérivée $x \mapsto \frac{-x}{1+x}$ négative sur cet intervalle. Cette fonction est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme elle est en outre nulle en 0, on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

C.2 Supposons la suite (T_n) convergente, vers un réel M. Cette suite étant clairement croissante, elle est majorée par sa limite M. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, grâce à la question précédente, et en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+v_k)$:

$$S_n \leqslant T_n \leqslant M.$$

La suite (S_n) est donc majorée (par M). Étant par ailleurs clairement croissante, elle converge : il en va donc de même pour la suite produit (p_n).

C.3 Raisonnons par contraposition, en supposant la suite (T_n) divergente. Étant croissante, elle diverge vers $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} (1+v_k) \geqslant T_n,$$

donc la suite produit (p_n) diverge également vers $+\infty$.
Remarque : pour montrer $p_n \geqslant T_n$, on peut développer le produit p_n : on a le terme obtenu en prenant 1 dans chacun des n termes du produit, puis ceux obtenus en prenant $n-1$ fois 1 dans ces termes, puis $n-2$ fois, etc., de sorte que

$$p_n = 1 + v_1 + \cdots + v_n + v_1 v_2 + v_1 v_3 + \cdots + v_{n-1} v_n + v_1 v_2 v_3 + \cdots + v_1 v_2 \ldots v_n \geqslant v_1 + \cdots + v_n.$$

On peut aussi, plus formellement, montrer ceci par récurrence, en prenant par exemple l'hypothèse $p_n \geqslant 1 + T_n$ (l'hérédité étant immédiate), ou en prenant l'hypothèse $p_n \geqslant T_n$, l'hérédité se faisant *à la Antoine U.*© :

$$p_{n+1} = p_n(1 + v_{n+1}) = p_n + p_n v_{n+1} \geqslant T_n + p_n v_{n+1} \geqslant T_n + v_{n+1} = T_{n+1}.$$

(grâce à l'hypothèse de récurrence, puis le fait –immédiat– que $p_n \geqslant 1$).

C.4

a On a vu précédemment que la suite produit associée à $(1 + 1/k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ divergeait, donc la suite (T_n) diverge également, d'après ce second critère.

b Pour tout entier naturel non nul k on a, par décroissance de la fonction inverse dans $[k, k+1]$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k},$$

d'où, en sommant pour k allant de 1 à un entier natuel non nul n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

puis

$$\ln(n+1) \leqslant T_n \leqslant \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) + 1.$$

On a donc $T_n \sim \ln(n+1)$ (le quotient tend vers 1), et même $T_n \sim \ln(n)$ (car $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1 + 1/n) = \mathrm{O}(1) = \mathrm{o}(\ln(n+1))$).