Corrigé de devoir non surveillé

Courbes paramétrées

Exercice 1 : Courbe cartésienne

Généralités L'arc f est défini sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine. On ne constate pas de réduction du domaine d'étude.

Pour tout $t \in \mathcal{D}$, on a :

$$x'(t) = \frac{-t(t+4)}{(t-2)^2(t+1)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{t(2t^2+5t+4)}{(t+1)^2}.$$

On en déduit les variations des fonctions coordonnées.

Points remarquables Le seul point stationnaire est celui d'instant 0, la tangente est verticale à l'instant -4

Les points d'instants 0, et -2 se situent sur l'axe des abscisses.

Étude du point singulier : c'est le point d'instant 0, qui se situe en l'origine. L'abscisse (resp. l'ordonnée) est négative (resp. positive) au voisinage de 0. En outre, on vérifie facilement que y/x est de limite -4 en 0. La courbe admet donc une tangente d'équation $y = -4x$ à l'instant 0.

Branches infinies Au voisinage de 2, la courbe présente une asymptote horizontale d'équation $y = 16/3$. Au voisinage de $\pm\infty$, on a une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

Dans ces deux cas, les variations des fonctions coordonnées permettent aisément de situer courbe et asymptotes.

La branche infinie au voisinage de -1 est plus délicate à étudier, car les deux fonctions coordonnées tendent vers $\pm\infty$ en $-1^\pm$. On trouve sans difficulté que

$$\lim_{t \to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = -3$$

On cherche donc à déterminer l'éventuelle limite de $y(t) + 3x(t)$ lorsque t tend vers -1.

Pour tout $t \in \mathcal{D}$, $y(t) + 3x(t) = \frac{(t-1)t^2}{t-2}$: cette quantité tend donc vers $2/3$ lorsque t tend vers -1. La courbe admet donc une asymptote d'équation $y = -3x + 2/3$ en -1. Enfin, pour tout $t \in \mathcal{D}$,

$$y(t) + 3x(t) - 2/3 = \frac{3t^2(t-1) - 2(t-2)}{3(t-2)} = \frac{3t^3 - 3t^2 - 2t + 4}{3(t-2)} = \frac{(t+1)(3t^2 - 6t + 4)}{3(t-2)},$$

cette quantité est du signe opposé de $t+1$ lorsque t est suffisamment proche de -1. La courbe est localement au-dessus de son asymptote en -1^-, et en dessous en -1^+.

Étude des points multiples On peut d'emblée écarter l'origine, correspondant uniquement à l'instant 0. On cherche deux instants distincts t et t' tels que $x(t) = x(t')$ et $y(t) = y(t')$, *i.e.*

$$\begin{cases} \frac{t^2}{(t-2)(t+1)} &= \frac{t'^2}{(t'-2)(t'+1)} \\ \frac{t^2(t+2)}{t+1} &= \frac{t'^2(t'+2)}{t'+1} \end{cases}$$

En formant le quotient la seconde relation par la première (on a écarté l'instant 0), on obtient la relation $t^2 - 4 = (t')^2 - 4$, *i.e.* $t = -t'$ (car $t \neq t'$). Cela induit la relation $(t-2)(t+1) = (t'-2)(t'+1)$, puis $t = t'$: la courbe n'admet pas de point multiple.

Support

Tous ces renseignements permettent de tracer le support de la courbe : on trace les asymptotes, les points remarquables, et on suit l'évolution temporelle.

Exercice 2 : Courbe polaire

Réduction du domaine d'étude Notons r l'application $\theta \mapsto 1+\tan\frac{\theta}{2}$, définie sur $\mathbb{R}\setminus(\pi+2\pi\mathbb{Z})$. Cette application est 2π périodique : il suffit donc de l'étudier sur $]-\pi,\pi[$.

Signe de la fonction r sur le domaine r est négative sur $]-\pi,-\pi/2]$, positive sur $[\pi/2,\pi[$. L'origine, *i.e.* le point de paramètre $-\pi/2$, n'est pas stationnaire.

Étude des branches infinies Pour tout $\theta\in]-\pi,\pi[$, on a :

$$r(\theta)\sin(\theta) = 2\sin(\theta/2)\left(\sin(\theta/2)+\cos(\theta/2)\right).$$

Cette quantité tend vers 2 lorsque θ tend vers π ou vers $-\pi$. La courbe présente donc en $-\pi$ et en pi une même asymptote d'équation cartésienne $y=2$.

Recherche des points multiples Par point double, l'énoncé entend sans doute point double de l'arc sur $]-\pi,\pi[$ (sur son domaine, tout point est multiple). La fonction tangente étant injective sur $]-\pi/2,\pi/2[$, la seule configuration possible pour qu'un point soit double est qu'il existe θ_0 et θ_1 dans $]-\pi,\pi[$ tels que $\theta_1=\theta_0+\pi$, et $r(\theta_1)=-r(\theta_0)$. Cette dernière relation équivaut, compte tenu de la première, à

$$\tan(\theta_0/2)-1/\tan(\theta_0/2)=-2$$

puis à

$$\tan(\theta_0)=1.$$

On a donc $\theta_0=-3\pi/4$ et $\theta_1=\pi/4$.

Les tangentes en ce point double sont respectivement dirigées par

$$\vec{i}=r'(-3\pi/4)\vec{u}_{-3\pi/4}+r(-3\pi/4)\vec{v}_{-3\pi/4}=-r'(-3\pi/4)\vec{u}_{\pi/4}-r(-3\pi/4)\vec{v}_{\pi/4}$$

et

$$\vec{j}=r'(\pi/4)\vec{u}_{\pi/4}+r(pi/4)\vec{v}_{\pi/4}.$$

La base $(\vec{u}_{\pi/4},\vec{v}_{\pi/4})$ étant orthonormée, on a

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=-r'(-3\pi/4)r'(\pi/4)-r(-3\pi/4)r(\pi/4).$$

D'une part, $r(\pi/4)=-r(-3\pi/4)=1+\tan(\pi/8)$, donc [1]

$$r(-3\pi/4)r(\pi/4)=-(1+\tan(\pi/8))^2=-2.$$

D'autre part,

$$r'(-3\pi/4)=\frac{1}{2}(1+\tan(-3\pi/8)^2)=\frac{1}{2}(1+\tan(\pi/8)^{-2})\quad\text{et}\quad r'(\pi/4)=\frac{1}{2}(1+\tan(\pi/8)^2)$$

donc

$$r'(-3\pi/4)r'(\pi/4)=\frac{1}{4}\left(\tan(\pi/8)^2+2+\tan(\pi/8)^{-2}\right)=\left(\frac{\tan(\pi/8)+1/\tan(\pi/8)}{2}\right)^2=2$$

Les tangentes au point double sont bien perpendiculaires.

Support Il se déduit facilement de cette étude.

1. $\tan(\pi/8)=\sqrt{2}-1$: en effet, $1=\tan(\pi/4)=\frac{2\tan(\pi/8)}{1-\tan(\pi/8)^2}$, donc $\tan(\pi/8)$ est la racine positive de X^2+2X-1

Exercice 3 : Centrale MP 08

Notons f l'arc (x, y). Soit $t \in \mathbb{R}$. Le vecteur vitesse à l'instant t est donné par $f'(t) = (6t, 6t^2) = 6t(1, t)$: si $t \neq 0$, $M(t)$ est régulier, et la tangente en ce point est dirigée par $(1, t)$. À l'instant 0, *i.e.* en l'unique point stationnaire de f, la tangente est dirigée par $f''(0) = (6, 0)$, ou encore par $(1, 0)$.

Ainsi, dans tous les cas, la tangente à l'instant t est dirigée par $u_t = (1, t)$, et une équation de cette tangente est

$$\begin{vmatrix} x - 3t^2 & 1 \\ y - 2t^3 & t \end{vmatrix} = 0,$$

soit encore

$$tx - y - t^3 = 0.$$

Soit t_1 et t_2 deux réels distincts. Les tangentes en $M(t_1)$ et $M(t_2)$ sont perpendiculaires si et seulement si $u_{t_1} \cdot u_{t_2} = 0$, soit encore $1 + t_1 t_2 = 0$.

On cherche donc les réels distincts t_1 et t_2 tels que

$$(1) \quad t_1 t_2 = -1,$$

(ces réels sont en particulier non nuls) et tels que la tangente à l'instant t_1 passe par $M(t_2)$, *i.e.*

$$(2) \quad t_1(3t_2^2) - 2t_2^3 - t_1^3 = 0.$$

Ce système d'équations ((1) et (2)) équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} t_2 & = & -\frac{1}{t_1} \\ \frac{3}{t_1} + \frac{2}{t_1^3} - t_1^3 & = & 0 \end{array} \right.$$

soit encore à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} t_2 & = & -\frac{1}{t_1} \\ t_1^6 - 3t_1^2 - 2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Nous cherchons donc les couples $(t_1, -1/t_1)$, où t_1^2 est une racine du polynôme $P = X^3 - 3X - 2$. Le polynôme P admet -1 et 2 pour racines évidentes. Comme il est en outre unitaire, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que

$$P = (X + 1)(X - 2)(X + a),$$

et une évaluation en 0 fournit $a = 1$.

Les couples cherchés sont donc $\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, les droites cherchées sont les tangentes aux instants $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, soit les droites d'équations

$$\sqrt{2}x - y - 2\sqrt{2} = 0 \quad \text{et} \quad -\sqrt{2}x - y + 2\sqrt{2} = 0.$$