Devoir non surveillé

Courbure de cercles tangents

On considère quatre cercles distincts C_1, C_2, C_3, C_4 de centres respectifs $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$, et de rayons respectifs R_1, R_2, R_3, R_4 non nuls. On suppose que chacun de ces quatre cercles est tangent aux trois autres, en trois points distincts. On appelle *courbure* de C_i le nombre $\rho'_i = \frac{1}{R_i}$.

1 Montrer qu'ou bien tous les cercles sont tangents extérieurement, ou bien l'enveloppe convexe d'un des cercles contient les trois autres cercles. S'ils sont tangents extérieurement, on pose $\rho_i = \rho'_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Dans l'autre cas, on suppose que l'enveloppe convexe de C_4 contient C_1, C_2, C_3, et on pose $\rho_i = \rho'_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, et $\rho_4 = -\rho'_4$.

2 Soit $\overrightarrow{V_i} = \overrightarrow{\Omega_4\Omega_i} (1 \leqslant i \leqslant 3)$. Montrer que

$$\overrightarrow{V_i} \cdot \overrightarrow{V_j} = \frac{(\rho_i + \rho_4)(\rho_j + \rho_4) - 2\rho_4^2}{\rho_i \rho_j \rho_4^2}$$

si $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$, et

$$\overrightarrow{V_i} \cdot \overrightarrow{V_i} = \frac{(\rho_i + \rho_4)^2}{\rho_i^2 \rho_4^2}$$

pour $i = 1, 2, 3$.

3 Montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_1} & \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} & \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_3} \\ \overrightarrow{V_2} \cdot \overrightarrow{V_1} & \overrightarrow{V_2} \cdot \overrightarrow{V_2} & \overrightarrow{V_2} \cdot \overrightarrow{V_3} \\ \overrightarrow{V_3} \cdot \overrightarrow{V_1} & \overrightarrow{V_3} \cdot \overrightarrow{V_2} & \overrightarrow{V_3} \cdot \overrightarrow{V_3} \end{vmatrix}$$

est nul.

Indication : on pourra utiliser le fait qu'étant donné trois vecteurs du plan, l'un peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres.

4 Prouver que

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_1} & \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} & \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_3} \\ \overrightarrow{V_2} \cdot \overrightarrow{V_1} & \overrightarrow{V_2} \cdot \overrightarrow{V_2} & \overrightarrow{V_2} \cdot \overrightarrow{V_3} \\ \overrightarrow{V_3} \cdot \overrightarrow{V_1} & \overrightarrow{V_3} \cdot \overrightarrow{V_2} & \overrightarrow{V_3} \cdot \overrightarrow{V_3} \end{vmatrix} = \frac{4}{\rho_1^2 \rho_2^2 \rho_3^2 \rho_4^2} \left(\left(\sum_{i=1}^{4} \rho_i \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^{4} \rho_i^2 \right).$$

5 En déduire que :

$$\left(\sum_{i=1}^{4} \rho_i \right)^2 = 2 \sum_{i=1}^{4} \rho_i^2$$