Corrigé de devoir non surveillé

Courbure de cercles tangents

1 Si deux cercles sont tangents intérieurement, mettons si C_1 est inclus dans l'enveloppe convexe D_4 de C_4 (notons leur point de tangence $P_{1,4}$), alors C_2 et C_3 sont nécessairement inclus dans D_4. En effet, si tel n'était pas le cas, mettons si C_2 et C_4 étaient tangents extérieurement (en un point $P_{2,4}$), alors pout tout point M_2 de C_2 différent de $P_{2,4}$, et tout point M_1 de C_1 différent de $P_{1,4}$, on aurait $M_2\Omega_4 > R_4$ et $M_1\Omega_4 < R_4$. Supposer $C_1 \cap C_2$ non vide impose donc $P_{1,4} = P_{2,4}$, cas exclu par hypothèse.

Par conséquent, ou bien tous les cercles sont tangents extérieurement, ou bien l'enveloppe convexe d'un des cercles contient les trois autres cercles.

2 Fixons $i \in \{1, 2, 3\}$. La distance $\Omega_4\Omega_i$ est égale à $R_4 + R_1$ si C_4 et C_i sont tangents extérieurement, et à $R_4 - R_i$ s'ils sont tangents intérieurement. Dans ces deux cas, la distance peut s'écrire $\pm\left(\frac{1}{\rho_4} + \frac{1}{\rho_i}\right)$. Ceci donne l'expression demandée de $\overrightarrow{V_i} \cdot \overrightarrow{V_i}$, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

De plus, si i et j sont deux entiers distincts parmi $1, 2, 3$, la distance $\Omega_i\Omega_j$ est égale à $R_i + R_j$, soit encore $\frac{1}{\rho_i} + \frac{1}{\rho_j}$ (en effet, ces deux cercles sont nécessairement tangents extérieurement, cf. la preuve de la question précédente).

Or $\left\|\overrightarrow{V_i} - \overrightarrow{V_j}\right\|^2 = \Omega_i\Omega_j^2$, mais aussi, en développant ce produit scalaire (grâce à la bilinéarité et la symétrie de ce dernier) :

$$\left\|\overrightarrow{V_i} - \overrightarrow{V_j}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{V_i}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{V_j}\right\|^2 - 2\overrightarrow{V_i} \cdot \overrightarrow{V_j}$$

(qui n'est autre que la formule d'Al-Kashi), ce qui donne l'expression demandée de $\overrightarrow{V_i} \cdot \overrightarrow{V_j}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V_i} \cdot \overrightarrow{V_j} &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{\rho_4} + \frac{1}{\rho_i}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_4} + \frac{1}{\rho_j}\right)^2 - \left(\frac{1}{\rho_i} + \frac{1}{\rho_j}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\rho_4^2} + \frac{1}{\rho_4\rho_i} + \frac{1}{\rho_4\rho_j} - \frac{1}{\rho_i\rho_j} \\
&= \left(\frac{1}{\rho_4} + \frac{1}{\rho_i}\right)\left(\frac{1}{\rho_4} + \frac{1}{\rho_j}\right) - \frac{2}{\rho_i\rho_j}
\end{aligned}$$

3 Au moins un des vecteurs $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$ est combinaison linéaire des deux autres (ces vecteurs sont coplanaires). On ne nuit pas à la généralité du raisonnement en supposant que $\overrightarrow{V_3}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$. Écrivons $\overrightarrow{V_3} = \alpha\overrightarrow{V_1} + \beta\overrightarrow{V_2}$, pour certains réels α et β. Par linéarité du produit scalaire par rapport à sa seconde variable, et en notant C_1, C_2, C_3 les colonnes du déterminant considéré, on a $C_3 = \alpha C_1 + \beta C_2$: ce déterminant est donc nul.

4 Notons C la colonne $\begin{pmatrix} \rho_1 + \rho_4 \\ \rho_2 + \rho_4 \\ \rho_3 + \rho_4 \end{pmatrix}$. Notons Δ le déterminant cherché. En identifiant une colonne à un vecteur de $\mathbb{R}^3$, on a clairement :

$$\Delta = \frac{1}{\rho_1^2\rho_2^2\rho_3^2\rho_4^6}\det\left((\rho_1 + \rho_4)C - 2\rho_4^2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, (\rho_2 + \rho_4)C - 2\rho_4^2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, (\rho_3 + \rho_4)C - 2\rho_4^2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\right)$$

En utilisant la trilinéarité du déterminant, et le fait [1] qu'un déterminant soit nul dès que deux de ses colonnes sont proportionnelles, on obtient que $\Delta' = (\rho_1^2\rho_2^2\rho_3^2\rho_4^6)\Delta$ vaut

$$4\rho_4^4\left((\rho_1 + \rho_4)\det\left(C, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) + (\rho_2 + \rho_4)\det\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, C, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) + (\rho_3 + \rho_4)\det\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, C\right) - 2\rho_4^2\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{vmatrix}\right).$$

1. c'est le *caractère alterné* du déterminant

Or

$$\det\left(C, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \sigma - 2\rho_1,$$

où $\sigma = \sum_{i=1}^4 \rho_i$. De même pour les deux déterminants suivants, de sorte que

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{4}{\rho_1^2\rho_2^2\rho_3^2\rho_4^2}\left((\rho_1+\rho_4)(\sigma-2\rho_1)+(\rho_2+\rho_4)(\sigma-2\rho_2)+(\rho_3+\rho_4)(\sigma-2\rho_3)-4\rho_4^2\right)\\
&= \frac{4}{\rho_1^2\rho_2^2\rho_3^2\rho_4^2}\left((\sigma+2\rho_4)\sigma-2\rho_4(\sigma-\rho_4)-2\rho_1^2-2\rho_2^2-2\rho_3^2-4\rho_4^2\right)\\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^4 \rho_i\right)^2 - 2\sum_{i=1}^4 \rho_i^2\right).
\end{aligned}$$

5 La relation

$$\left(\sum_{i=1}^4 \rho_i\right)^2 = 2\sum_{i=1}^4 \rho_i^2$$

résulte immédiatement des deux questions précédentes.