Corrigé de devoir non surveillé

Développement limité de la fonction tangente

1 L'ensemble des réels x tels que $\tan(x)$ et $\tan(2x)$ soient bien définis est

$$\boxed{\mathbb{R} - \left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)\right)}$$

Lorsque $\tan(x)$ et $\tan(2x)$ sont bien définis :

$$\boxed{\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}}$$

2 La fonction tangente est impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: elle admet donc un $\mathrm{DL}_6(0)$, dont la partie régulière est impaire. Comme en outre $\tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$, le terme linéaire de cette partie régulière est X : $\boxed{\text{il existe des réels } \alpha_3 \text{ et } \alpha_5 \text{ tels que } \tan(x) = x + \alpha_3 x^3 + \alpha_5 x^5 + \mathrm{o}_0(x^6).}$

3 Au voisinage de 0, nous avons $\tan(2x)(1 - \tan^2(x)) = 2\tan(x)$ ce qui permet d'écrire :

$$(2x + 8\alpha_3 x^3 + 32\alpha_5 x^5 + \mathrm{o}(x^6))(1 - (x + \alpha_3 x^3 + \alpha_5 x^5 + \mathrm{o}_0(x^6))^2) = 2x + 2\alpha_3 x^3 + 2\alpha_5 x^5 + \mathrm{o}_0(x^6),$$

d'où les relations $8\alpha_3 - 2 = 2\alpha_3$ et $32\alpha_5 - 8\alpha_3 - 4\alpha_3 = 2\alpha_5$ (en égalant les termes en x^3, puis les termes en x^5) ce qui conduit à $\boxed{\alpha_3 = \frac{1}{3} \text{ et } \alpha_5 = \frac{2}{15}.}$

4 On part de

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \mathrm{o}_0(x^6).$$

En écrivant $\tan \circ \arctan = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, on a :

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \mathrm{o}_0(x^6) + \alpha_3\left(x - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}_0(x^4)\right) + \alpha_5 x^5 + \mathrm{o}_0(x^6) = x,$$

d'où les relations

$$-\frac{1}{3} + \alpha_3 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{5} - \alpha_3 + \alpha_5 = 0,$$

puis $\boxed{\alpha_3 = \frac{1}{3}}$ et $\boxed{\alpha_5 = \frac{2}{15}}$.

Remarque : cette méthode se justifie par le fait qu'on développe bien plus facilement arctan que tan en 0 (en combinant intégration, composition à droite par un monôme, et développement connu).

Remarque : pour calculer un développement de f^{-1} à partir de celui de f par cette méthode, on utilise plus volontiers la relation $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$ que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$, puisque dans la seconde, on obtient des relations non linéaires.

5 La fonction $\tan'$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, admet un $\mathrm{DL}_5(0)$, donné par

$$\tan'(x) = 1 + 3\alpha_3 x^2 + 5\alpha_5 x^4 + \mathrm{o}_0(x^5).$$

La relation $\tan' = 1 + \tan^2$ prouve donc que

$$1 + 3\alpha_3 x^2 + 5\alpha_5 x^4 + \mathrm{o}_0(x^5) = 1 + \left(x + \alpha_3 x^3 + \mathrm{o}_0(x^4)\right)^2,$$

d'où les relations

$$3\alpha_3 = 1 \quad \text{et} \quad 5\alpha_5 = 2\alpha_3,$$

puis, à nouveau, les valeurs déjà trouvées.