Devoir non surveillé

Théorème de Darboux

Dans tout ce problème, I désigne un intervalle d'intérieur non vide, et f est une fonction définie sur I, à valeurs réelles. On note $\tau(f)$ l'ensemble des taux d'accroissement de f entre deux points de I. Plus précisément :

$$\tau(f) = \left\{ \frac{f(y)-f(x)}{y-x},\ (x,y) \in I^2, x < y \right\} = \left\{ \frac{f(y)-f(x)}{y-x},\ (x,y) \in I^2, x \neq y \right\}$$

1 Donner (sans justification), pour chacune des assertions suivantes portant sur f, une assertion logiquement équivalente portant sur $\tau(f)$:

1. f est injective ;
2. f est croissante ;
3. f est strictement monotone ;
4. f est lipschitzienne.

2 On suppose dans cette question f continue sur I.

a Soit (x,y) et (x',y') deux couples de points de I, avec $x < y$ et $x' < y'$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $t(y'-x') + (1-t)(y-x) \neq 0$.

b En considérant l'application

$$\theta : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{f(ty'+(1-t)y)-f(tx'+(1-t)x)}{ty'+(1-t)y-(tx'+(1-t)x)} \end{array},$$

montrer que $\tau(f)$ contient le segment d'extrémités $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ et $\frac{f(y')-f(x')}{y'-x'}$.

c En déduire que $\tau(f)$ est un intervalle.

d En déduire que si f est en outre injective, alors f est strictement monotone : une fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.

e On suppose que $I =]a,b[$, où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$. Montrer que si $\lim_a f = -\infty$, alors $\tau(f)$ n'est pas majoré.

3 Dans cette question, on suppose f dérivable sur I.

a Montrer que $\tau(f) \subset f'(I)$. Montrer que $f'(I)$ possède au plus deux autres points que l'on explicitera.

a Comparer $\tau(f)$ et $f'(I)$ lorsque f est la fonction cube sur I, où I vaut successivement $[0,1]$, $]0,1[$ et $[-1,2]$.

b Montrer le théorème de Darboux : $f'(I)$ est un intervalle.