# Devoir non surveillé

## Problème – Demi-normes

Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$. On considère les propriétés suivantes :

1. *(séparation)* $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
2. *(homogénéité)* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(xy) = f(x)f(y).$
3. $\exists C \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) \leqslant C \max(f(x), f(y)).$
4. *(inégalité triangulaire)* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) \leqslant f(x) + f(y).$

On dit que $f$ est une *demi-norme* si elle vérifie les propriétés i.,ii. et iii.. On dit que $f$ est une *norme* si elle vérifie les propriétés i., ii. et iv..

**I.1** On suppose que $f$ est une demi-norme.

**a** Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

**b** Montrer que pour tout réel $x$, on a $f(-x) = f(x)$, et que, pour tout réel non nul $x$, on a $f(1/x) = 1/f(x)$.

On définit

$$D = \{f(1 + z), \quad (z \in \mathbb{R}) \wedge (f(z) \leqslant 1)\}.$$

**c** Montrer que $D$ admet une borne supérieure (dans $\mathbb{R}$), que nous noterons $C_f$, et que $C_f \geqslant 1$.

**d** Montrer que pour tous réels $x$ et $y$ :

$$f(x + y) \leqslant C_f \max(f(x), f(y)).$$

**I.2**

**a** Vérifier que la fonction valeur absolue $g \ : x \mapsto |x|$ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$) est une norme et une demi-norme, et calculer $C_g$.

**b** Vérifier que la fonction carré $h \ : x \mapsto x^2$ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$) est une demi-norme, et calculer $C_h$.

**I.3** Vérifier que toute norme $f$ est une demi-norme, et que $C_f \leqslant 2$.

On se propose de montrer la réciproque : soit $f$ une demi-norme telle que $C_f \leqslant 2$. Nous voulons montrer que $f$ est une norme.

**I.4** Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, tout $(x_0, \ldots, x_{2^r-1}) \in \mathbb{R}^{2^r}$ :

$$f\left(\sum_{k=0}^{2^r-1} x_k\right) \leqslant C_f^r \max(f(x_0), \ldots, f(x_{2^r-1})).$$

**I.5** Soit $a \in \mathbb{N}^*$.

**a** Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{r-1} \leqslant a \leqslant 2^r - 1$.

**b** En déduire : $f(a) \leqslant 2a$.

**I.6** Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On pose $n = 2^r - 1$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

**a** Montrer : $f((x + y)^n) \leqslant C_f^r \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \left(f\left(\binom{n}{k}\right) f(x)^k f(y)^{n-k}\right)$.

**Remarque :** on rappelle la formule du binôme de Newton. Pour tous réels $x$ et $y$, tout entier naturel $n$, $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ (où $0^0 = 1$ par convention si besoin est).

**b** Montrer $f((x + y)^n) \leqslant 2^{r+1}(f(x) + f(y))^n$, puis :

$$f(x + y) \leqslant 2^{\frac{r+1}{2^r-1}}(f(x) + f(y)).$$

**c** Montrer que la suite $\left(2^{\frac{r+1}{2^r-1}}\right)$ converge vers 1, et conclure.