Corrigé de devoir non surveillé

Problème – Demi-normes

I.1

a En prenant $x = y = 1$ dans ii., on trouve $f(1)^2 = f(1)$. Comme $f(1) \neq 0$ d'après i., $f(1) = 1$.

En prenant $x = y = -1$ dans ii., et sachant que f est à valeurs positives, il vient $f(-1) = 1$.

b Pour tout réel x, en appliquant ii. au couple $(x, -1)$, on obtient $f(-x) = f(x)$.

Pour tout réel non nul x, il vient, en appliquant ii. au couple $(x, 1/x)$: $f(1/x) = 1/f(x)$.

c D est clairement une partie non vide de $\mathbb{R}$ (elle comprend $f(2)$ par exemple). D'après iii., pour tout réel z tel que $f(z) \leqslant 1$, on a $f(1+z) \leqslant C \max(f(1), f(z)) \leqslant C$ car $f(1) = 1$: D est ainsi également majorée par C, et admet donc une borne supérieure C_f, inférieure ou égale à C [1].

Par ailleurs, pour $z = 0$, on a $f(z) = 0 \leqslant 1$, donc $1 = f(1+z) \in D$, puis $1 \leqslant C_f$.

d Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Le résultat voulu est évident si x ou y est nul. Supposons x et y non nuls, et supposons (sans perte de généralité) $f(y) \leqslant f(x)$. Soit $z = y/x$.

On a $f(z) = \frac{f(y)}{f(x)} \leqslant 1$, d'où, par définition de C_f, $f(1+z) \leqslant C_f$. En multipliant cette inégalité par le réel positif $f(x)$, et grâce à ii., on obtient bien le résultat voulu :

$$f(x+y) \leqslant C_f \max(f(x), f(y)).$$

I.2

a g est bien à valeurs positives, définie sur $\mathbb{R}$, ne s'annule qu'en 0, vérifie évidemment ii.. De plus, d'après l'inégalité triangulaire, pour tous réels x et y,

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2\max(|x|, |y|),$$

ce qui montre que g est à la fois une norme et une demi-norme, et que $C_g \leqslant 2$. Comme $g(2) = 2$ (et $g(1) = 1$), $C_g \geqslant 2$, puis $C_g = 2$.

b La fonction carré, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ ne s'annule qu'en 0, vérifie ii., et, pour tous réels x et y

$$(x+y)^2 \leqslant (|x| + |y|)^2 \leqslant 4\max(|x|^2, |y|^2) = 4\max(x^2, y^2).$$

Ceci montre que h est une demi-norme, et que $C_h \leqslant 4$. Or $h(2) = 4$ (et $h(1) = 1$), donc $C_h \geqslant 4$, puis $C_h = 4$.

I.3 Pour toute norme f, tous réels x et y, on a :

$$f(x+y) \leqslant f(x) + f(y) \leqslant 2\max(f(x), f(y)),$$

ce qui montre que f est une demi-norme.

En appliquant ce calcul au couple $(x, y) = (1, z)$, où z est un réel tel que $f(z) \leqslant 1$, on a :

$$f(1+z) \leqslant f(1) + f(z) \leqslant 2,$$

et donc $C_f \leqslant 2$.

I.4 On montre ceci par récurrence faible sur r (l'assertion portant pour tout 2^r-uplet de réels), l'amorçage étant assuré par I.1.d. Supposant la propriété vérifiée à un rang $r \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a, pour tout 2^{r+1}-uplet $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant 2^{r+1}-1}$ de réels :

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{k=0}^{2^{r+1}-1} x_k\right) &= f\left(\sum_{k=0}^{2^r-1} x_k + \sum_{k=2^r}^{2^{r+1}-1} x_k\right) \\
&\leqslant C_f \max\left(f\left(\sum_{k=0}^{2^r-1} x_k\right), f\left(\sum_{k=2^r}^{2^{r+1}-1} x_k\right)\right) \quad \text{(d'après I.1.d)} \\
&\leqslant C_f \max\left(C_f^r \max(f(x_0), \dots, f(x_{2^r-1})), C_f^r \max(f(x_{2^r}), \dots, f(x_{2^{r+1}-1}))\right) \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= C_f^{r+1} \max(f(x_0), \dots, f(x_{2^{r+1}-1})),
\end{aligned}$$

1. nous utiliserons d'ailleurs ce dernier résultat dans la suite

d'où l'hérédité, puis le résultat souhaité.

Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, tout $(x_0, \ldots, x_{2^r-1}) \in \mathbb{R}^{2^r}$:

$$f\left(\sum_{k=0}^{2^r-1} x_k\right) \leqslant C_f^r \max(f(x_0), \ldots, f(x_{2^r-1})).$$

I.5

a On peut montrer l'existence d'un tel entier en observant que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^*, a < 2^k\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, et admet donc un plus petit élément $r \in \mathbb{N}^*$. Que r soit égal à 1 ou pas, on a bien $2^{r-1} \leqslant a < 2^r$.
Remarque : on pouvait également utiliser le logarithme en base 2.

b On applique I.4, à la famille $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant 2^r-1}$ définie par $x_k = 1$ si $k < a$, et par $x_k = 0$ (cette famille est de somme a). On a donc

$$f(a) \leqslant C_f^r \max(f(1), f(0)) = C_f^r \leqslant 2^r \leqslant 2a.$$

I.6

a D'après I.4, et la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} f((x+y)^n) &= f\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right) \\ &\leqslant C_f^r \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \left(f\left(\binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right)\right) \\ &= C_f^r \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \left(f\left(\binom{n}{k}\right) f(x)^k f(y)^{n-k}\right) \quad \text{(grâce à ii.)} \end{aligned}$$

b D'après la question précédente, ainsi que I.5.b, et en se rappelant que $C_f \leqslant 2$, on obtient

$$f((x+y)^n) \leqslant 2^r \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \left(f\left(\binom{n}{k}\right) f(x)^k f(y)^{n-k}\right) \leqslant 2^{r+1} \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \left(\binom{n}{k} f(x)^k f(y)^{n-k}\right).$$

En majorant le maximum de la seconde famille ci-dessus par la somme de ses termes, il vient :

$$f((x+y)^n) \leqslant 2^{r+1} (f(x) + f(y))^n.$$

La croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction racine n-ième conduit alors à :

$$f(x+y) \leqslant 2^{\frac{r+1}{2^r-1}} (f(x) + f(y)).$$

c Bien sûr, $r + 1 = \mathrm{o}(2^r - 1)$, donc $\left(\frac{r+1}{2^r-1}\right)$ converge vers 0, puis $\left(2^{\frac{r+1}{2^r-1}}\right)$ converge vers 1.

En passant à la limite dans l'inégalité obtenue à la question précédente, il vient : $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$. Ceci valant pour tout couple (x, y) de réels, la fonction f est bien une norme.