Devoir non surveillé

Exercice 1 : Dérangements

Soit E un ensemble fini non vide. On appelle *dérangement* de E toute permutation f de E sans point fixe, c'est-à-dire telle que :

$$\forall\, k \in E, \quad f(k) \neq k$$

Bien entendu, le nombre de dérangements d'un ensemble fini ne dépend que de son cardinal.

Pour tout entier naturel non nul n, on note Der_n l'ensemble des dérangements de $[\![1, n]\!]$, et d_n son cardinal.

1 Soit n un entier naturel non nul. Donner le cardinal de l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$.

2 Calculer d_1 et d_2.

3 On fixe un entier naturel $n \geqslant 3$, et, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on considère les ensembles

$$X_k = \{f \in Der_n, f^{-1}(n) = f(n) = k\} \quad \text{et} \quad Y_k = \{f \in Der_n, f^{-1}(n) = k, f(n) \neq k\}$$

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Calculer les cardinaux de X_k et de Y_k en fonction de d_{n-2} et d_{n-1}.
Indication : on pourra établir une bijection entre Y_k et Der_{n-1}.

4 En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, la formule :

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$$

5 Montrer, pour tout $n \geqslant 2$:

$$d_n = n d_{n-1} + (-1)^n$$

6 En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$d_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$