Corrigé de devoir non surveillé

Déterminant

1 Notons Δ le déterminant étudié. En utilisant le caractère multilinéaire alterné du déterminant, il vient :

$$\Delta = \det(e_1, \dots, e_n) + \det(b_1 a, e_2, e_3, \dots, e_n) + \det(e_1, b_2 a, e_3, \dots, e_n) + \cdots + \det(e_1, \dots, e_{n-1}, b_n a)$$

Bien sûr, $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ et, en remplaçant a par sa décomposition dans $(e_1, \dots, e_n)$, on obtient (toujours grâce au caractère multilinéaire alterné du déterminant) :

$$\boxed{\Delta = 1 + \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_i.}$$

2 Une première idée, à la Vandermonde, consiste à remplacer la dernière colonne par $\begin{pmatrix} P(X) \\ P(X+1) \\ \vdots \\ P(X+n-1) \end{pmatrix}$, afin d'obtenir un déterminant polynomial $Q(X)$, de degré au plus $n-1$ (développer selon la dernière colonne), et dont $1, \dots, n-1$ sont des racines évidentes. Il existe donc un scalaire λ tel que

$$Q = \lambda \prod_{k=1}^{n-1} (X - k).$$

On observe d'ailleurs que si $\deg(Q) < n-1$, alors $Q = 0$ (Q possède plus de racines que son degré). Le déterminant cherché valant $Q(n)$, il est alors nul. On se place désormais dans le cas où Q est de degré $n-1$.

Reste à calculer λ, et à observer que le déterminant cherché vaut $Q(n)$. Le problème que vous avez rencontré a sans doute été le calcul de λ. De fait, la récurrence n'est pas aussi facile à obtenir que dans le cas d'un déterminant de Vandermonde.

L'idée consiste à appliquer la suite $(L_1 \leftarrow L_1 - L_2, L_2 \leftarrow L_2 - L_3, \dots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n)$ d'opérations élémentaires sur le déterminant (ce qui ne le modifie pas). On constate alors, en développant le déterminant selon la dernière colonne, que

$$\lambda = (-1)^{n-1} a_{n-1} \begin{vmatrix} \Delta(P)(1) & \Delta(P)(2) & \dots & \Delta(P)(n-1) \\ \Delta(P)(2) & \Delta(P)(3) & \dots & \Delta(P)(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta(P)(n-1) & \Delta(P)(n) & \dots & \Delta(P)(2n-3) \end{vmatrix},$$

où $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

On a donc la formule de récurrence suivante :

$$\Omega(P, n) = (-1)^{n-1} a_{n-1} (n-1)!\, \Omega(\Delta(P), n-1),$$

où $\Omega(P, n)$ est le déterminant cherché.

On observe que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\Delta^k(P)$ est un polynôme de degré $n-1-k$, de coefficient dominant $a_{n-1} \prod_{i=1}^{k} (n-i)$ (par convention, un produit indexé par l'ensemble vide vaut 1).

On montre alors par récurrence descendante que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\Omega(P, n) = (-1)^{\sum_{i=k}^{n-1} (n-1-i)} ((n-1)!\, a_{n-1})^{n-1-k} \Omega(\Delta^k(P), k+1).$$

On conclut en remarquant que $\Delta^{n-1}(P)$ est constant de valeur $(n-1)!\, a_{n-1}$:

$$\boxed{\Omega(P, n) = (-1)^{n(n-1)/2} ((n-1)!)^n a_{n-1}^n.}$$