Devoir non surveillé

Déterminant de Gram

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel réel de dimension non nulle (éventuellement infinie), et muni d'un produit scalaire. Le produit scalaire de deux vecteurs u et v est noté $u \cdot v$, la norme d'un vecteur u est notée $\|u\|(= \sqrt{u \cdot u})$. De plus, dans les trois premières parties, E désigne un espace eudidien de dimension n ($n \geqslant 2$).

Partie A – Déterminant de Gram en dimension 3

Dans cette partie, $n = 3$ et E est l'espace affine euclidien canonique orienté $\mathbb{R}^3$.

Si u, v, w sont trois vecteurs quelconques de E , on note $\mathrm{Gram}(u, v, w)$ la matrice définie par :

$$\mathrm{Gram}(u, v, w) = \begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & w \cdot w \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(u, v, w) = \det\left(\mathrm{Gram}(u, v, w)\right)$$

A.1 Calculer $G(u, v, w)$ si u, v, w sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux.

A.2 On suppose w orthogonal à u et v. Exprimer $G(u, v, w)$ en fonction de $G(u, v)$ et de $\|w\|$, où

$$G(u, v) = \det\begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{pmatrix}.$$

A.3 u, v, w sont trois vecteurs de E et B une base orthonormale de E. Montrer que le réel $|\det_B(u, v, w)|$ ne dépend pas du choix de B.

On admet (provisoirement) que $G(u, v, w) = (\det_B(u, v, w))^2$.

Pour u, v vecteurs quelconques de E, $u \wedge v$ désigne le produit vectoriel de u par v.

Rappel : Si B est une base orthonormée directe de E, pour tout élément y de E on a

$$det_B(u, v, y) = (u \wedge v) \cdot y.$$

A.4 Montrer que $\|u \wedge v\|^2 = G(u, v)$.

Partie B – Déterminant de Gram en dimension finie

Soient $u_1, \ldots, u_n$ n vecteurs de E. Pour tout i, tout j, entiers de $[\![1, n]\!]$, on note $g_{i,j} = u_i \cdot u_j$.

On note $\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice (appelée *matrice de Gram*) carrée de taille n, de coefficient $g_{i,j}$ en position (i, j), et le déterminant de cette matrice (appelé *déterminant de Gram*) est noté

$$G(u_1, \ldots, u_n) = \det\left(\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n)\right)$$

Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. On pose, pour tout entier j de $[\![1, n]\!]$

$$u_j = \sum_{k=1}^{n} u_{k,j} e_k$$

B.1 Exprimer, pour tout i, tout j, entiers de $[\![1, n]\!]$, le réel $g_{i,j}$ en fonction des coordonnées des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ dans la base B.

B.2

a Soit $A = (u_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n) = {}^tAA$$

b En déduire que $G(u_1, \ldots, u_n)$ est un réel positif.

c Montrer que

$$G(u_1, \ldots, u_n) \neq 0 \iff (u_1, \ldots, u_n) \text{ libre}$$

Partie C – Une propriété des ellipses

Dans cette partie, $n = 2$, et E est le plan affine euclidien canonique orienté $\mathbb{R}^2$. On note (e_1, e_2) sa base canonique.

On munit E d'un autre produit scalaire noté f_1. Soit (u_1, u_2), (u'_1, u'_2) deux bases orthonormales **pour** f_1.

C.1 On note $A = P_{(e_1,e_2) \to (u_1,u_2)}$, $S = P_{(u_1,u_2) \to (u'_1,u'_2)}$ et $A' = P_{(e_1,e_2) \to (u'_1,u'_2)}$.

a Donner le lien entre ces trois matrices.

b Laquelle de ces matrices est-elle assurément orthogonale ?

c Montrer que $G_1 = {}^tSG_0S$, avec $G_0 = \mathrm{Gram}(u_1, u_2)$ et $G_1 = \mathrm{Gram}(u'_1, u'_2)$.

C.2 Montrer : $G(u_1, u_2) = G(u'_1, u'_2)$ et $\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 = \|u'_1\|^2 + \|u'_2\|^2$.

$(O; i, j)$ est un repère orthonormé du plan euclidien E. On considère deux nombres réels strictement positifs a et b et on définit la courbe $\mathcal{C}$ d'équation :

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$ où x et y désignent les coordonnées dans le repère $(O\,;\, i, j)$.

C.3 Pour u et v, vecteurs de E, de coordonnées (x, y) et (x', y') dans la base (i, j) on note

$$f_1(u, v) = \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2}.$$

Montrer qu'on définit ainsi un nouveau produit scalaire dans E.

C.4 Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$ et T la tangente à $\mathcal{C}$ en M. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par O et parallèle à T et M' un élément de $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

Montrer que $f_1(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0$.

C.5 Montrer que $OM^2 + OM'^2 = a^2 + b^2$ et que $G(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = a^2b^2$. u, v, w sont trois vecteurs de E et B une base orthonormale de E. Montrer que le réel $|\det_B(u, v, w)|$ ne dépend pas du choix de B.

Partie D – Exemple de convergence en moyenne quadratique

Dans toute la suite, E n'est plus forcément de dimension finie. Si $u_1, \ldots, u_r$ sont r vecteurs de E ($r \in \mathbb{N}^*$), on note, comme dans la partie B, $G(u_1, \ldots, u_r)$ le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ de coefficient $u_i \cdot u_j$ en position (i, j).

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de $p (\in \mathbb{N}^*)$ vecteurs de E et $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. Pour tout x élément de E, on note x_F le projeté orthogonal de x sur F.

D.1 Soit $x \in E$. Il existe un unique p-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ de réels tel que $x_F = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k$. En utilisant les formules de Cramer, exprimer, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, λ_k en fonction des vecteurs $e_1, \ldots, e_p, x$.

Indication : on pourra trouver un système carré dont les inconnues sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, obtenu en remarquant que $x - x_F$ est orthogonal à $e_1, \ldots, e_p$.

D.2 Soit $x \in E$. Montrer que le réel $d(x, F)$ défini par $d(x, F) = inf\{\|x - f\| \;;\; f \in F\}$, vérifie :

$$d(x, F)^2 = x \cdot (x - x_F)$$

D.3 Soit $x \in E$. Montrer que

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x, e_1, \ldots, e_p)}{G(e_1, \ldots, e_p)}}$$

Indication : Effectuer l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k C_{k+1}$ sur les colonnes $C_1, \ldots, C_{p+1}$ de $\mathrm{Gram}(x, e_1, \ldots, e_p)$.

Dans toute la suite du problème, E désigne $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$P \cdot Q = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

D.4 Pour n entier non nul, on note $E_n = \mathrm{Vect}(X, \ldots, X^n)$. Vérifier que E_n est un sous-espace vectoriel de E de dimension n.

D.5 Pour n entier non nul, on note :

$$u_n = \inf \left\{ \int_0^1 \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i t^i\right)^2 dt \ ; \ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

En interprétant u_n comme le carré d'une distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de E, exprimer u_n en fonction de déterminants de Gram.

Pour toute suite finie $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ de réels positifs ou nuls ($m \in \mathbb{N}^*$), on définit la matrice $C(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ comme la matrice carrée de taille m, de terme général (de position (i,j)) $\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j + 1}$, et on note $D(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ le déterminant de $C(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

D.6 Déduire de D.3 et de D.5 que

$$u_n = \frac{D(0,1,2,\dots,n)}{D(1,2,\dots,n)} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{n+4} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n+2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}}$$

D.7 Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fraction rationnelle

$$\psi_n(X) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{X+1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{X+2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{X+3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{X+n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}$$

Montrer que l'on peut trouver un réel α_n tel que

$$\psi_n = \alpha_n \frac{(X-1)(X-2)\dots(X-n)}{(X+1)(X+2)\dots(X+n+1)}$$

D.8 En exprimant de deux manières différentes la partie polaire de ψ_n relativement au pôle -1 (une par la méthode classique, la donnant en fonction de α_n, l'autre grâce à l'expression de ψ_n sous forme de déterminant), relier α_n et $D(1,2,\dots,n)$.

D.9 En déduire que $u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Indication : Calculer $\psi_n(0)$ de deux façons différentes.

Remarque : Pour tout entier non nul n, il existe un unique polynôme $P_n \in E_n$ (P_n est le projeté orthogonal de 1 sur E_n) tel que $\|1 - P_n\| = \sqrt{u_n} = \frac{1}{n+1}$. Il est donc prouvé que la suite (P_n) (dont les éléments sont des polynômes) tend, pour la norme déduite du produit scalaire sur E, vers 1. Le résultat est en fait bien plus général (cf. Centrale 99 PSI MII, dont ce sujet est inspiré).