Corrigé de devoir non surveillé

Déterminant de Gram

Partie A – Déterminant de Gram en dimension 3

A.1 Sous les hypothèses de l'énoncé, la matrice de Gram est diagonale, et son déterminant est donc le produit de ses coefficients diagonaux :

$$G(u, v, w) = \|u\|^2 \|v\|^2 \|w\|^2$$

A.2 On calcule dans ce cas :

$$G(u, v, w) = G(u, v) \|w\|^2$$

A.3 Si B et B' sont deux bases orthonormées de E, on a d'une part $\det_{B'}(u, v, w) = \det_{B'}(B) \det_B(u, v, w)$, et d'autre part $\det_{B'}(B) = \pm 1$ (les deux bases sont orthonormées), ce qui fournit le résultat.

A.4 $G(u, v, u \wedge v) = G(u, v) \|u \wedge v\|^2$ d'après A.2, mais aussi, d'après le résultat admis,

$$G(u, v, u \wedge v) = (\det_B(u, v, u \wedge v))^2 = \|u \wedge v\|^4 .$$

Le résultat demandé est donc acquis si $\|u \wedge v\| \neq 0$. Il est également vrai si $\|u \wedge v\| = 0$, *i.e.* lorsque u et v sont colinéaires. En effet, c'est clair si u est nul, et sinon, il existe un réel non nul λ tel que $v = \lambda u$, ce qui conduit à

$$G(u, v) = \begin{vmatrix} u \cdot u & \lambda u \cdot u \\ \lambda u \cdot u & \lambda^2 u \cdot u \end{vmatrix} = 0.$$

Partie B – Déterminant de Gram en dimension finie

B.1 Comme la base B est orthonormée, on a, pour tous i et j entiers de $[\![1, n]\!]$:

$$g_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} u_{k,i} u_{k,j}$$

B.2

a Le coefficient en position (i, j) de ${}^tA$ est $u'_{i,j} = u_{j,i}$, et le résultat en découle, d'après la définition du produit matriciel.

b On déduit de ce qui précède, et des propriétés du déterminant, que

$$G(u_1, \dots, u_n) = (\det A)^2 \geqslant 0$$

c $G(u_1, \dots, u_n)$ est non nul si et seulement si $\det A \neq 0$, *i.e.* $(u_1, \dots, u_n)$ est libre (A est la matrice de $(u_1, \dots, u_n)$ dans B).

Partie C – Une propriété des ellipses

C.1

a On a bien sûr $A' = AS$.

b A', matrice de changement de base entre deux bases orthonormales pour un **même** produit scalaire (ici f_1), est orthogonale.

c Comme $G_0 = {}^tAA$ et $G_1 = {}^tA'A'$, on obtient :

$$G_1 = {}^tA'A' = {}^t(AS)AS = {}^tS{}^tAAS = {}^tSG_0S$$

C.2 S étant orthogonale, ${}^tS = S^{-1}$, et les matrices G_0 et G_1 sont donc semblables. En tant que telles, elles ont même déterminant et même trace, ce qui peut s'écrire

$$G(u_1, u_2) = G(u_1', u_2') \text{ et } \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 = \|u_1'\|^2 + \|u_2'\|^2 .$$

C.3 Il est clair que f_1 est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E, *i.e.* est un produit scalaire sur E.

C.4 Un vecteur directeur de T est $\overrightarrow{OM'} = (x_{M'}, y_{M'})$. La courbe $\mathcal{C}$ est une ligne de niveau de la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, et la tangente en M à $\mathcal{C}$ admet donc $\overrightarrow{f(M)} = (\frac{2x_M}{a^2}, \frac{2x_M}{b^2})$ comme vecteur normal. Les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{f(M)}$ sont orthogonaux pour le produit scalaire usuel, d'où

$$\frac{x_M x_{M'}}{a^2} + \frac{y_M y_{M'}}{b^2} = 0,$$

i.e. $f_1(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0$.
Remarque : il n'était pas nécessaire de passer par le gradient pour répondre à la question ...

C.5 $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ et $((a, 0), (0, b))$ sont deux bases orthonormales de E pour le produit scalaire f_1 : les formules

$$OM^2 + OM'^2 = a^2 + b^2 \text{ et } G(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = a^2b^2$$

sont donc des applications directes de C.2.

Partie D – Exemple de convergence en moyenne quadratique

D.1 Afin de déterminer ces scalaires λ_k, on exprime l'orthogonalité de $x - x_F$ avec tous les e_j. Le système linéaire ainsi obtenu, de p équations à p inconnues (les λ_k) est de Cramer, car son déterminant n'est autre que $G(e_1, \ldots, e_p)$ (non nul d'après B.2.b). Les formules de Cramer permettent d'écrire :

$$\lambda_k = \frac{\begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \mathbf{e_1 \cdot x} & \ldots \\ & (e_i \cdot e_j) & \vdots & \\ & & \vdots & \\ \ldots & \ldots & \mathbf{e_p \cdot x} & \ldots \end{vmatrix}}{G(e_1, \ldots, e_p)}$$

pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, où la colonne en gras est la k-ième.

D.2 D'après le cours, $d(x, F)^2 = \|x - x_F\|^2 = (x - x_F) \cdot (x - x_F) = x \cdot (x - x_F) - x_F \cdot (x - x_F) = x \cdot (x - x_F)$, puisque $x_F \in F$ et $x - x_F \in F^\perp$.

D.3 Dans la matrice $\mathrm{Gram}(x, e_1, \ldots, e_n)$, changer la première colonne C_1 en $C_1 - \sum_{k=1}^n \lambda_k C_{k+1}$ (les λ_k sont définis en D.1) ne modifie pas le déterminant de Gram, et change la première colonne en

$$\begin{pmatrix} x \cdot (x - x_F) \\ e_1 \cdot (x - x_F) \\ \vdots \\ e_n \cdot (x - x_F) \end{pmatrix},$$

colonne dont tous les termes sont nuls, sauf le premier. Un développement du déterminant par rapport à sa première colonne, assisté de D.2, permet de conclure :

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x, e_1, \ldots, e_p)}{G(e_1, \ldots, e_p)}}$$

D.4 Une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre, ce qui prouve le résultat demandé (la preuve directe de la liberté est, ici, tout aussi simple).

D.5 u_n est le carré de la distance du polynôme 1 à E_n, ce qui permet d'écrire, grâce à D.3 :

$$u_n = \frac{G(1, X, \ldots, X^n)}{G(X, \ldots, X^n)}$$

D.6 Un calcul simple montre que, pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $X^i \cdot X^j = \frac{1}{i+j+1}$. La question précédente donne alors :

$$u_n^2 = \frac{D(0,1,2,\dots,n)}{D(1,2,\dots,n)} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n+2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}}$$

D.7 La fraction rationnelle ψ_n est de degré strictement négatif, puisque somme de telles fractions rationnelles (développer ψ_n par rapport à sa première colonne). Ses éventuels pôles sont tous simples, et sont à prendre dans $\{-(n+1),\dots,-1\}$: ψ_n admet au plus $n+1$ pôles comptés avec leurs ordres de multiplicité. Elle possède par ailleurs au moins n racines, à savoir $1, 2\dots, n$ (puisque pour les évaluations en ces points, le déterminant définissant ψ_n possède deux colonnes identiques).

Ces contraintes imposent l'existence d'un réel α_n tel que

$$\psi_n = \alpha_n \frac{(X-1)(X-2)\dots(X-n)}{(X+1)(X+2)\dots(X+n+1)}$$

D.8 La partie polaire de ψ_n relativement au pôle -1 s'écrit $\frac{\zeta}{X+1}$, pour un certain réel (non nul) ζ. On a d'une part

$$\zeta = \alpha_n \frac{(-2)\dots(-1-n)}{n!} = \alpha_n(-1)^n(n+1)$$

(multiplication par $X+1$ puis évaluation en -1), et d'autre part

$$\zeta = D(1, 2\dots, n)$$

(développement du déterminant définissant ψ_n par rapport à sa première colonne).

On a donc

$$\alpha_n(-1)^n(n+1) = D(1,2,\dots,n).$$

D.9 D'une part, $\psi_n(0) = \alpha_n \frac{(-1)^n}{(n+1)}$ (évaluation directe), et d'autre part, $\psi_n(0) = D(0,1,2,\dots,n)$ (évaluation en 0 de ψ_n sous forme de déterminant). Il vient donc, au vu de D.6 et D.8, $u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$.