Devoir non surveillé

Exercice 1 : Une propriété géométrique des tangentes à des courbes intégrales

On considère un intervalle I, des fonctions continues a et b de I dans $\mathbb{R}$, et l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \quad y' + a(x)y = b(x).$$

Soit $x_0 \in I$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note f_λ l'unique solution de $\mathcal{E}$ valant λ en x_0, $\mathcal{C}_\lambda$ le graphe de f_λ, et on note T_λ la tangente à $\mathcal{C}_\lambda$ au point d'abscisse x_0.

On se propose de montrer que les droites T_λ (où λ décrit $\mathbb{R}$) sont soit toutes parallèles, soit possèdent un point commun, par deux méthodes.

1

a Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Donner une équation de T_λ de la forme $y = \alpha x + \beta$ (où α, β sont des réels dépendant de λ, $a(x_0)$ et $b(x_0)$).

b On suppose que $a(x_0) = 0$. Montrer que toutes les droites T_λ (où λ décrit $\mathbb{R}$) sont parallèles.

c On suppose que $a(x_0) \neq 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver un point indépendant de λ par lequel passe T_λ, et conclure.

2 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

a Montrer que $f_\lambda = \lambda f_1 + (1 - \lambda) f_0$.

b Soit $E_0 \ : y = \alpha_0(x - x_0) + \beta_0$ et $E_1 \ : y = \alpha_1(x - x_0) + \beta_1$ des équations respectives de T_0 et T_1. Montrer que $\lambda E_1 + (1 - \lambda)E_0$ est une équation de T_λ. Conclure en utilisant la notion de faisceau de droites (inutile de montrer les résultats généraux sur cette notion) .