Corrigé de devoir non surveillé

Exercice 1 : Une propriété géométrique des tangentes à des courbes intégrales

1

a T_λ passe par (x_0, λ), et a pour pente $f'_\lambda(x_0) = b(x_0) - \lambda a(x_0)$: elle admet donc pour équation

$$y = (b(x_0) - \lambda a(x_0))x + \lambda - (b(x_0) - \lambda a(x_0))x_0.$$

b Dans ce cas, T_λ a pour pente $b(x_0)$, qui est indépendant de λ, et les droites considérées sont donc bien toutes parallèles.

c On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y &= (b(x_0) - \lambda a(x_0))x + \lambda - (b(x_0) - \lambda a(x_0))x_0. \\ &= \lambda(-a(x_0)x + a(x_0)x_0 + 1) + b(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

Il (faut et il) suffit donc que $-a(x_0)x + 1 + a(x_0)x_0 = 0$ et $y = b(x_0)(x - x_0)$, soit que $(x, y) = \left(\frac{1}{a(x_0)} + x_0, \frac{b(x_0)}{a(x_0)}\right)$.

2

a $\lambda f_1 + (1 - \lambda)f_0 = f_0 + \lambda(f_1 - f_0)$ est bien solution de $\mathcal{E}$ ($f_1 - f_0$ est solution de l'équation homogène associée), et vaut λ en x_0 : c'est l'unique solution au problème de Cauchy définissant f_λ, d'où le résultat.

b $\alpha_0 = f'_0(x_0)$, $\beta_0 = 0$, $\alpha_1 = f'_1(x_0)$ et $\beta_1 = 1$, de sorte que (d'après la question précédente) $\lambda E_1 + (1 - \lambda)E_0$ est l'équation

$$y = (\lambda f'_1(x_0) + (1 - \lambda)f'_0(x_0))(x - x_0) + \lambda = f'_\lambda(x_0)(x - x_0) + \lambda,$$

et est donc une équation de T_λ. Étant donné deux droites, le faisceau de ces deux droites est constitué de droites toutes parallèles ou possédant un point commun, d'où le résultat.