Devoir non surveillé

Problème – Une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients non constants

Dans ce problème, tous les intervalles considérés sont d'intérieur non vide, et I désigne un tel intervalle. On demande à chaque fois les solutions réelles des équations différentielles considérées, c'est-à-dire celles à valeurs réelles.

On étudie l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \quad : \quad (x^2-x)y''+(x+1)y'-y=\delta(x),$$

où δ est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$.

L'*équation homogène associée à* $\mathcal{E}$ est

$$(\mathcal{H}) \quad : \quad (x^2-x)y''+(x+1)y'-y=0.$$

Une fonction f définie sur I et à valeurs réelles est dite *solution* de $\mathcal{E}$ si f est deux fois dérivable sur I, et si, pour tout point x de I :

$$(x^2-x)f''(x)+(x+1)f'(x)-f(x)=\delta(x).$$

On pose $I_1=\mathbb{R}_-^*$, $I_2=]0,1[$, $I_3=]1,+\infty[$, $J_1=]-\infty,-1[$ et $J_2=]-1,0[$.

Soit $a,b,c,d,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. On rappelle que, pour que le système linéaire

$$\begin{cases} ax+by &= \alpha \\ cx+dy &= \beta \end{cases}$$

admette un unique couple solution, il suffit que $ad-bc\neq 0$, *i.e.* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$.

Remarque : l'introduction du chapitre III ne figure pas dans le cours officiel. Par ailleurs, ne faites référence au cours que s'il s'applique bien à la situation étudiée !

Remarque : les fautes de syntaxe (comme écrire $(f(x))'$) seront sanctionnées.

Partie A – Préliminaires

A.1 Trouver des réels a, b, c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$, on ait :

$$\frac{3x^2+1}{x^3-x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

Partie B – Résolution de $\mathcal{H}$

Dans cette partie, on cherche à résoudre $\mathcal{H}$ sur divers intervalles.

B.1 Vérifier que $f_0 \ : x \mapsto x+1$ est solution de $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{R}$.

B.2 Afin de résoudre cette équation différentielle homogène sur $I \in \{J_1, J_2, I_2, I_3\}$, on introduit une fonction C deux fois dérivable sur I, ainsi que

$$f \ : \begin{array}{ccl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C(x)f_0(x) = C(x)(x+1) \end{array}.$$

a Dans la démonstration de quels résultats du cours a-t-on employé une telle méthode, que l'on pourrait qualifier de variation de la constante ?

b Montrer que f est solution de $\mathcal{H}$ si et seulement si C' est solution (sur I) d'une équation différentielle linéaire $\mathcal{H}'$ d'ordre 1 que l'on formera.

c Résoudre $\mathcal{H}'$ sur I.

d Vérifier que la solution générale de $\mathcal{H}$ sur I s'écrit $x \mapsto \frac{\lambda}{x-1} + \mu(x+1)$, où λ et μ décrivent $\mathbb{R}$.

B.3 Résoudre $\mathcal{H}$ sur I_1.

B.4 Résoudre $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{R}$.

Partie C – Problème de Cauchy pour $\mathcal{H}$

C.1 Soit $I \in \{I_1, I_2, I_3\}$, $(x_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution f de $\mathcal{H}$ sur I telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_0'$.

C.2

a Montrer que si on remplace I par $\mathbb{R}$, le problème précédent peut n'admettre aucune solution.

b Toujours dans ce cas où l'on remplace I par $\mathbb{R}$, ce problème peut-il admettre plusieurs solutions ?

Partie D – Résolution de $\mathcal{E}$

On propose ici une méthode de résolution de $\mathcal{E}$, dite de variation de la (ou des) constante(s).

D.1 On suppose disposer d'une solution particulière ϕ_0 de $\mathcal{E}$ sur I. Montrer que ϕ est solution sur I de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\phi - \phi_0$ est solution (sur I) de $\mathcal{H}$.

D.2 Résoudre $\mathcal{E}$ lorsque δ est constante de valeur 1, sur $I \in \{I_1, I_2, I_3\}$, puis sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite, $I \in \{I_1, I_2, I_3\}$.

D.3 Trouver une fonction f_1 telle que la solution générale de $\mathcal{H}$ sur I s'écrive $x \mapsto C_0 f_0(x) + C_1 f_1(x)$, où C_0 et C_1 décrivent $\mathbb{R}$.

D.4 On cherche une solution particulière de $\mathcal{E}$ sous la forme $g \ : x \mapsto C_0(x)f_0(x) + C_1(x)f_1(x)$, pour certaines fonctions C_0 et C_1, deux fois dérivables sur I, en imposant, pour tout $x \in I$:

$$(\mathcal{R}_1) \ : \quad C_0'(x)f_0(x) + C_1'(x)f_1(x) = 0.$$

a Montrer que g est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si C_0', C_1', f_0', f_1' et δ sont reliés par une relation $\mathcal{R}_2$ que l'on précisera.

b En utilisant $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, montrer que g est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si C_0 et C_1 sont des primitives sur I de fonctions que l'on précisera (à l'aide de δ).

D.5 On suppose ici que $\delta(x) = x$, pour tout réel x.

Résoudre $\mathcal{E}$ sur I.