Corrigé de devoir non surveillé

Problème – Une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients non constants

Partie A – Préliminaires

A.1 Dans une phase d'analyse, on suppose l'existence de tels réels a, b, c. Pour trouver a, on multiplie la relation voulue par x, et on fait tendre x vers 0, obtenant $a = -1$. De même, on obtient $b = c = 2$.

Dans une phase de synthèse, on vérifie que ces choix de a, b et c conviennent.

Partie B – Résolution de $\mathcal{H}$

B.1 f_0 est bien sûr deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $f_0'(x) = 1$ et $f_0''(x) = 0$ pour tout réel x. On a donc bien

$$(x^2 - x)f_0''(x) + (x+1)f_0'(x) - f_0(x) = 0,$$

pour tout réel x : $\boxed{f_0 \text{ est solution de } \mathcal{H} \text{ sur } \mathbb{R}.}$

B.2

a On a employé cette méthode pour trouver une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sans problème de raccord, et, surtout, pour résoudre dans le cas complexe les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.

b f est bien sûr deux fois dérivable, et, pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = C'(x)(x+1) + C(x), f''(x) = C''(x)(x+1) + 2C'(x)(x+1),$$

et donc

$$(x^2 - x)f''(x) + (x+1)f'(x) - f(x) = (x^3 - x)C''(x) + (3x^2 + 1)C'(x).$$

f est donc solution de $\mathcal{H}$ si et seulement si C' est solution (sur I) de

$$(\mathcal{H}') \quad : \quad (x^3 - x)y' + (3x^2 + 1)y = 0.$$

c Grâce aux préliminaires, une primitive sur I de $x \mapsto \frac{3x^2+1}{x^3-x}$ est $x \mapsto \ln\left(\frac{(x^2-1)^2}{|x|}\right)$. La solution générale de $\mathcal{H}'$ sur I est donc :

$$x \mapsto \lambda \frac{x}{(x^2-1)^2},$$

où λ décrit $\mathbb{R}$.

d Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Les primitives de $x \mapsto \lambda \frac{x}{(x^2-1)^2}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \lambda \frac{-1}{2(x^2-1)} + \mu$, où μ décrit $\mathbb{R}$, donc la solution générale de $\mathcal{H}$ sur I est $x \mapsto \left(\frac{-\lambda}{2(x^2-1)} + \mu\right)(x+1)$, où λ et μ décrivent $\mathbb{R}$, ou encore, plus simplement

$$\boxed{x \mapsto \frac{\lambda}{x-1} + \mu(x+1),}$$

où λ et μ parcourent $\mathbb{R}$.

B.3 Supposons disposer d'une solution f de $\mathcal{H}$ sur I_1 : ses restrictions respectives à J_1 et J_2 sont des solutions de $\mathcal{H}$ sur ces intervalles : d'après la question précédente, il existe donc des réels $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$, tels que, pour tout $i \in \{1, 2\}$, tout $x \in J_i$, on ait :

$$f(x) = \frac{\lambda_i}{x-1} + \mu_i(x+1).$$

La continuité en -1 impose $\lambda_1 = \lambda_2$ (et $f(-1) = -\lambda_1/2$), la dérivabilité en -1 entraîne alors $\mu_1 = \mu_2$: ceci montre l'existence de réels λ et μ tels que, pour tout $x \in I_1$: $f(x) = \frac{\lambda}{x-1} + \mu(x+1)$.

Réciproquement, on vérifie aisément que les fonctions de cette forme sont solutions de $\mathcal{E}$ sur I_1.

Les solutions de $\mathcal{E}$ sur I_1 sont les fonctions de la forme

$$\boxed{x \mapsto \frac{\lambda}{x-1} + \mu(x+1),}$$

où λ et μ parcourent $\mathbb{R}$.

B.4 Supposons disposer d'une solution f de $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{R}$. Grâce aux études précédentes, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, la restriction de f à I_i est de la forme $x \mapsto \frac{\lambda_i}{x-1} + \mu_i(x+1)$, pour certains réels λ_i et μ_i. La continuité en 1 impose $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, et la dérivabilité en ce point impose $\mu_2 = \mu_3$: la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est donc de la forme $x \mapsto \mu(x+1)$. La continuité en 0 donne $-\lambda_1 + \mu_1 = \mu$, la dérivabilité en ce point n'impose rien de plus, mais la dérivabilité à l'ordre deux en ce point conduit à $-2\lambda_1 = 0$.

La fonction f est donc de la forme $x \mapsto \mu(x+1)$.

La réciproque étant claire, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $\mathcal{H}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \mu(x+1)$, où μ décrit $\mathbb{R}$.

Partie C – Problème de Cauchy pour $\mathcal{H}$

C.1 Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{\lambda}{x-1} + \mu(x+1)$ (nous décrivons ainsi la solution générale de $\mathcal{H}$ sur I). Le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_0-1} & (x_0+1) \\ -\frac{1}{(x_0-1)^2} & 1 \end{vmatrix}$$

étant non nul (il vaut $2x_0/(x_0-1)^2$), il existe un unique couple (λ, μ) de réels tel que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y'_0$. D'après la résolution de $\mathcal{H}$ sur I effectuée en B.2.d et B.3, on en déduit qu'il existe une unique solution f de $\mathcal{H}$ sur I telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y'_0$.

C.2

a D'après la résolution de $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{R}$ (effectuée en B.4), le problème de Cauchy associé à $\mathcal{H}$ (sur $\mathbb{R}$) et les conditions initiales $y(1) = 1$ et $y'(1) = 0$ par exemple n'a pas de solution.

b Un tel problème ne peut pas admettre plusieurs solutions : le seul point commun à deux courbes intégrales de $\mathcal{H}$ (sur $\mathbb{R}$) est $(-1, 0)$. Un problème de Cauchy admettant plusieurs solutions doit donc comprendre la condition initiale $y(-1) = 0$. La condition initiale supplémentaire $y'(-1) = y'_0$ (donnant la tangente de cette courbe en l'origine) fait que ce problème admet une unique solution, à savoir $x \mapsto y'_0(x+1)$.

Partie D – Résolution de $\mathcal{E}$

D.1 Soit $\phi\ : I \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable. ϕ est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si, pour tout point x de I :

$$(x^2 - x)\phi''(x) + (x+1)\phi'(x) - \phi(x) = \delta(x),$$

soit encore, ϕ_0 étant solution de $\mathcal{E}$,

$$(x^2 - x)\phi''(x) + (x+1)\phi'(x) - \phi(x) = (x^2 - x)\phi_0''(x) + (x+1)\phi_0'(x) - \phi_0(x),$$

soit aussi

$$(x^2 - x)(\phi - \phi_0)''(x) + (x+1)(\phi - \phi_0)'(x) - (\phi - \phi_0)(x) = 0.$$

$\boxed{\phi \text{ est solution de } \mathcal{E} \text{ si et seulement si } \phi_0 \text{ est solution de } \mathcal{H}.}$

D.2 La fonction constante de valeur -1 est solution (évidente) de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$, donc sur tout intervalle.

La solution générale de $\mathcal{E}$ sur I (resp. $\mathbb{R}$) est donc $x \mapsto -1 + \frac{\lambda}{x-1} + \mu(x+1)$ (resp. $x \mapsto \mu(x+1)$), où λ et μ décrivent $\mathbb{R}$ (resp. μ décrit $\mathbb{R}$).

D.3 Il suffit de prendre (comme on l'a déjà fait) $\boxed{f_1\ : x \mapsto \frac{1}{x-1}.}$

D.4

a g est deux fois dérivable sur I, et, pour tout point x de I :

$$g'(x) = C_0'(x)f_0(x) + C_0(x)f_0'(x) + C_1'(x)f_1(x) + C_1(x)f_1'(x) = C_0(x)f_0'(x) + C_1(x)f_1'(x),$$

grâce à la relation $\mathcal{R}_1$, puis

$$g''(x) = C_0(x)f_0''(x) + C_0'(x)f_0'(x) + C_1(x)f_1''(x) + C_1'(x)f_1'(x),$$

et nous obtenons enfin

$$(x^2 - x)g''(x) + (x+1)g'(x) - g(x) = (x^2 - x)(C_0'(x)f_0'(x) + C_1'(x)f_1'(x)),$$

de sorte que g est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si, pour tout point x de I :

$$\boxed{(\mathcal{R}_2) \quad : \quad C_0'(x)f_0'(x) + C_1'(x)f_1'(x) = \frac{\delta(x)}{x^2 - x}.}$$

b Grâce aux relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, on constate que g est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si C_0 est une primitive de $h_0 \ : x \mapsto \frac{\delta(x)}{2x^2}$,et C_1 est une primitive de $h_1 \ : x \mapsto \frac{\delta(x)(1-x^2)}{2x^2}$.

D.5 Les primitives de h_0 sur I sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}\ln|x| + \lambda$, où λ décrit $\mathbb{R}$. Les primitives de h_1 sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + \mu$, où μ décrit $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{E},I}$ des solutions sur I de $\mathcal{E}$ est donc :

$$\left\{ \begin{array}{cccl} f & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{2}(\ln|x|)(x+1) + \frac{\frac{1}{2}(\ln|x|) - \frac{x^2}{4}}{x-1} + \lambda(x+1) + \frac{\mu}{x-1} \end{array} , (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2) \right\},$$

soit encore, plus agréablement :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{cccl} f & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{x^2 \ln|x|}{2(x-1)} + \lambda(x+1) + \frac{\mu}{x-1} \end{array} , (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2) \right\}.}$$