Devoir non surveillé

Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants

On considère l'équation différentielle suivante, sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(F) \qquad x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$$

1 Soit z une application deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = z(\ln x).$$

Exprimer à l'aide des applications z', z'' les dérivées première et seconde de l'application y.
2 Montrer que l'application $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (F), si et seulement si l'application z est solution d'une équation différentielle à préciser, que l'on notera (H).
3 Résoudre (H). En déduire l'ensemble des solutions de (F).
4 Déterminer l'unique solution f de (F) vérifiant $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$.