Corrigé de devoir non surveillé

Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants

1 y est deux fois dérivable, en tant que composée (licite) de telles fonctions. On trouve alors grâce aux théorèmes généraux sur la dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, y'(x) = \frac{1}{x} z'(t) \text{ et } y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'(t) + \frac{1}{x^2} z''(t)$$

2 Remarquons que y est deux fois dérivable si et seulement si z l'est. Il suffit de remplacer y, y' et y'' par leurs expressions à l'aide de z, z' et z'', pour trouver que y est solution de (F) si et seulement si pour tout $x > 0$, on a :

$$z''(\ln(x)) + z(\ln(x)) = 0$$

Autrement dit, y est solution de (F) si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de

$$(H) \qquad z''(t) + z(t) = 0$$

3 Classiquement, l'ensemble des solutions de (H) est le plan vectoriel réel engendré par les fonctions cosinus et sinus. L'ensemble des solutions de (F) est donc le plan vectoriel réel engendré par les fonctions $\cos \circ \ln$ et $\sin \circ \ln$, soit :

$$\{x \mapsto a \cos(\ln(x)) + b \sin(\ln(x)), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

4 On cherche donc f sous la forme $x \mapsto a \cos(\ln(x)) + b \sin(\ln(x))$, pour certains réels a et b à déterminer. $f(1) = 0$ se traduit par la nullité de a, et $f'(1) = 1$ par $b = 1$. L'unique solution au système donné est donc $\sin \circ \ln$.