Corrigé de devoir non surveillé

Exemples d'équations différentielles d'ordres 3 et 4

1 L'ensemble demandé est évidemment :

$$\{x \mapsto \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

2 Si $g = f + f' + f''$, f est implicitement supposée deux fois dérivable. Si $g' = g$ alors g est dérivable, donc f est trois fois dérivable et $f''' = f$. Réciproquement, si f est trois fois dérivable, alors g est dérivable et $g' = g$ (calculs immédiats).

3 On est ramené à trouver les solutions de

$$y'' + y' + y = g$$

Or, $\frac{g}{3}$ est une solution particulière évidente de cette équation, et l'équation homogène associée se résout sans souci. L'ensemble recherché est :

$$\left\{x \mapsto C_1 e^x + \left(C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) e^{-\frac{x}{2}}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

4 On a envie de poser $g = f + f' + f'' + f'''$, mais cela ne suffit pas, puisque si l'équation que satisfait g est facile à résoudre, on est bloqué pour en déduire f. Remarquons que $f' + f''' = (f + f'')'$, ce qui nous invite à introduire une seconde fonction auxiliaire $h = f + f''$ (l'introduction de g devient alors superflue, elle nous a seulement aidé à trouver h). h satisfait l'équation différentielle $y'' = y$, équation dont les solutions sont les combinaisons linéaires des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ (ou ch et sh, si l'on préfère). f est solution de $y^{(4)} = y$ si et seulement si elle est solution de $y'' + y = h$. Une solution particulière est évidemment $\frac{h}{2}$, et l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est bien sûr engendré par les fonctions cosinus et sinus. L'ensemble des solutions de $y^{(4)} = y$ est donc :

$$\left\{x \mapsto C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x), C_1, C_2, C_3, C_4\right\}$$

Remarque : L'ensemble des solutions est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les quatre fonctions indépendantes exponentielle, inverse de l'exponentielle, cosinus et sinus. Cet espace est donc de dimension 4 (comme dans $y^{(4)}$). Ce n'est bien sûr pas un hasard, comme vous pouvez vous en convaincre empiriquement en considérant les cas des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants des premier et second ordres, et l'exemple précédent $y''' = y$ du troisième ordre.