Devoir non surveillé

Problème – Une équation différentielle linéaire à paramètres

Soit $(m, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On introduit l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_{m,\beta}) \ : \quad (m-1)y'' + 2my' + (m+1)y = e^{\beta x}.$$

On s'intéresse à ses solutions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie A – Le cas où $m = 1$

On suppose dans cette partie $m = 1$: c'est un cas particulier puisque l'équation est alors d'ordre 1.

A.1 Résoudre l'équation $\mathcal{E}_{m,\beta}$.

A.2 Déterminer l'unique solution f_β à $\mathcal{E}_{m,\beta}$ valant 1 en 0.

A.3 Vérifier que $f'_\beta(0)$ est une valeur indépendante de β, et déterminer cette valeur.

Partie B – Le cas où $m \neq 1$

B.1 Soit $m' \in \mathbb{R}$, distinct de m. On suppose disposer d'une solution commune ψ à $\mathcal{E}_{m,\beta}$ et $\mathcal{E}_{m',\beta}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que ψ est solution de $\mathcal{E}_{m'',\beta}$, où $m'' = \lambda m + (1-\lambda)m'$.

Cela montre (inutile de détailler) que pour β fixé, une fonction est solution commune à tous les $\mathcal{E}_{m'',\beta}$, où m'' décrit $\mathbb{R}$, si et seulement si c'est une solution commune à deux de ces équations.

On suppose désormais $m \neq 1$: l'équation est donc d'ordre 2.

B.2 Résoudre l'équation homogène associée à l'équation $\mathcal{E}_{m,\beta}$.

B.3 On suppose dans cette question $\beta = -1$ et $m = 0$. Déterminer l'unique solution φ de $\mathcal{E}_{m,\beta}$ telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = -\frac{1}{2}$.

B.4 On suppose ici $\beta = -1$. Vérifier que l'unique solution au problème de Cauchy associé à $\mathcal{E}_{m,\beta}$ et les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -\frac{1}{2}$ est la fonction φ.

B.5 Montrer que -1 est la seule valeur de β pour laquelle toutes les équations $\mathcal{E}_{m,\beta}$, où m décrit $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, admettent une solution commune.