Corrigé de devoir non surveillé

Exercice 1 : Une équation complexe

1 z est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\frac{z-i}{z+i}$ est une racine n-ième de a^n, *i.e.* il existe $\omega \in \mathbb{U}_n$ tel que

$$\frac{z-i}{z+i} = \omega a,$$

soit encore $\omega a \neq 1$ et

$$z = i\frac{1+\omega a}{1-\omega a}.$$

Ainsi,

$$\Omega = \left\{ i\frac{1+\omega a}{1-\omega a}, \omega \in \mathbb{U}_n \wedge \omega a \neq 1 \right\}.$$

2

a Soit z_0 une solution réelle de $\mathcal{E}$. On a donc

$$\left|\frac{z_0-i}{z_0+i}\right|^n = |a|^n,$$

Or $z_0 - i$ et $z_0 + i$ sont conjugués (puisque z_0 est réel), donc leur quotient est de module 1. On en déduit bien que $|a| = 1$.

b Soit z une solution de $\mathcal{E}$. On a, en prenant les modules dans $\mathcal{E}$:

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right|^n = 1,$$

puis $|z-i| = |z+i|$.

Le point M d'affixe z est donc à égale distance des points I et J d'affixes i et $-i$, *i.e.* sur la médiatrice de $[IJ]$, qui n'est autre que l'axe des abscisses : z est réel.

Toutes les solutions de $\mathcal{E}$ sont donc bien réelles.