# Devoir non surveillé

## Problème – Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants

On étudie dans ce problème des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants, **qui ne rentrent donc pas dans le cadre du cours.** On cherche les solutions à valeurs réelles.

### Partie A – Un exemple

On s'intéresse dans cette partie aux équations

$$(\mathcal{E}) \quad : \quad (\operatorname{sh} x)y'' + (2\operatorname{ch} x)y' + (\operatorname{sh} x)y = 0.$$

et

$$(\mathcal{E}') \quad : \quad (\operatorname{sh} x)y' + (\operatorname{ch} x)y = 0.$$

On étudie ces équations sur un intervalle $I$ égal à $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ (et on cherche les solutions à valeurs réelles) : il n'y a donc pas de problème de raccord.

**A.1** Résoudre l'équation $(\mathcal{E}')$ sur $I$.

**A.2** Montrer qu'une fonction deux fois dérivable $f$ est solution de $\mathcal{E}$ sur $I$ si et seulement si $g \; : x \mapsto f'(x) + \frac{1}{\operatorname{th} x} f(x)$ est solution de l'équation $\mathcal{E}'$ sur $I$.

**A.3** Résoudre $\mathcal{E}$ sur $I$.

### Partie B – Entrelacement de zéros

On fixe deux fonctions continues $p$ et $q$, d'un intervalle $I$ dans $\mathbb{R}$.

On considère les équations différentielles

$$(\mathcal{E}_p) \quad y'' + p(t)y = 0$$

et

$$(\mathcal{E}_q) \quad y'' + q(t)y = 0$$

On se donne deux solutions respectives $f$ et $g$ de ces équations.

Pour tout $t \in I$, on introduit le Wronskien à l'instant $t$ :

$$W(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix} = f(t)g'(t) - f'(t)g(t).$$

**B.1** Donner, pour tout $t \in I$, une expression simple de $W'(t)$ (en fonction de $f(t)$, $g(t)$, $p(t)$ et $q(t)$).

**B.2** On suppose ici $p \leqslant q$ (*i.e.* $p(t) \leqslant q(t)$ pour tout $t \in I$). On suppose $f$ nulle en $\alpha$ et $\beta$ (où $\alpha < \beta$), et à valeurs strictement positives sur $]\alpha, \beta[$.

**a** En admettant que le résultat sur les problèmes de Cauchy à l'ordre 2 s'étend à ce type d'équations, montrer que $f'(\alpha)$ et $f'(\beta)$ sont non nuls.

**b** En revenant à la définition du nombre dérivé d'une fonction (comme limite d'un taux d'accroissement), montrer que $f'(\alpha) > 0$ et $f'(\beta) < 0$.

**c** Montrer par l'absurde, en utilisant le Wronskien, qu'il existe un point $\gamma$ de $[\alpha, \beta]$ où $g$ s'annule.

**B.3**

**a** Montrer que si $q \geqslant 1$, alors $g$ s'annule au moins une fois sur tout segment de longueur $\pi$.

**b** Montrer que si $q \leqslant 1$, et si $g$ n'est pas nulle, alors $g$ s'annule au plus une fois sur tout segment de longueur strictement inférieure à $\pi$.

### Partie C – L'équation de Bessel

On fixe un réel $\lambda$, et on considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (de Bessel)

$$(\mathcal{E}) \quad y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right) y = 0.$$

**C.1** Montrer que $f$, fonction deux fois dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si $g\ : x \mapsto f(x)\sqrt{x}$ est solution de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}') \quad z'' + \left(1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{4x^2}\right) z = 0$$

**C.2** Soit $f$ une solution non nulle de $\mathcal{E}$. Déduire de ce qui précède que si $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$ (resp. $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$), alors $f$ s'annule au plus (resp. au moins) une fois sur un segment de longueur $\pi$ (resp. de longueur strictement inférieure à $\pi$).