Corrigé de devoir non surveillé

Problème – Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants

Partie A – Un exemple

A.1 La fonction $1/\operatorname{sh}$ est solution évidente non nulle de $\mathcal{E}'$ sur I, donc l'ensemble des solutions cherché est $\{\frac{\lambda}{\operatorname{sh}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

A.2 g est dérivable sur I puisque f est deux fois dérivable, et pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = f''(x) + \frac{1}{\operatorname{th} x} f'(x) - \frac{\operatorname{th}'(x)}{\operatorname{th}^2 x} f(x) = f''(x) + \frac{1}{\operatorname{th} x} f'(x) - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} f(x).$$

On a donc, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sh} x) g'(x) + (\operatorname{ch} x) g(x) &= \operatorname{sh}(x) f''(x) + \operatorname{ch}(x) f'(x) - \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} f(x) + \operatorname{ch}(x) f'(x) + \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}(x)} f(x) \\
&= \operatorname{sh}(x) f''(x) + 2\operatorname{ch}(x) f'(x) + \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{sh}(x)} f(x) \\
&= \operatorname{sh}(x) f''(x) + 2\operatorname{ch}(x) f'(x) + \operatorname{sh}(x) f(x),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

A.3 D'après ce qui précède, les solutions de $\mathcal{E}$ sur I sont les solutions (sur I) de

$$(\mathcal{E}'') \quad y' + \frac{1}{\operatorname{th}(x)} y = \frac{\lambda}{\operatorname{sh}(x)},$$

pour un certain réel λ.

L'équation homogène associée à $(\mathcal{E}'')$, équivalente à $\mathcal{E}'$, a pour solution générale $x \mapsto \frac{\mu}{\operatorname{sh}(x)}$, où mu décrit $\mathbb{R}$. Pour en trouver une solution particulière, on utilise la méthode de variation de la constante : une solution de $\mathcal{E}''$ est $x \mapsto \frac{C(x)}{\operatorname{sh}(x)}$, où C est une primitive de la fonction constante de valeur μ : le choix $C\ : x \mapsto \mu x$ convient donc.

Ainsi la solution générale de $\mathcal{E}$ est-elle

$$x \mapsto \frac{\lambda + \mu x}{\operatorname{sh}(x)},$$

où λ et μ décrivent $\mathbb{R}$.

Partie B – Entrelacement de zéros

B.1 W est bien dérivable, puisque f et g sont deux fois dérivables, et, pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned}
W'(t) &= f'(t)g'(t) + f(t)g''(t) - f''(t)g(t) - f'(t)g'(t) \\
&= f(t)g''(t) - f''(t)g(t) \\
&= (p(t) - q(t)) f(t) g(t).
\end{aligned}$$

B.2

a On sait que $f(\alpha) = 0$. Si on avait en outre $f'(\alpha) = 0$, alors f serait l'unique solution à ce problème de Cauchy, et serait donc la fonction nulle, ce qui est exclu : $f'(\alpha) \neq 0$ et, de même, $f'(\beta) \neq 0$.

b Soit $t \in]\alpha, \beta[$. On a d'après les hypothèses $\frac{f(t) - f(\alpha)}{t - \alpha} > 0$, donc, en passant à la limite lorsque t tend vers α, $f'(\alpha) \geqslant 0$. Comme $f'(\alpha) \neq 0$, on a bien $f'(\alpha) > 0$, et, de même, $f'(\beta) < 0$.

c Supposons donc que g ne s'annule pas sur $[\alpha, \beta]$. Quitte à considérer $-g$, on peut supposer que g ne prenne que des valeurs strictement positives. Dans ce cas, le Wronskien W est décroissant (sa dérivée est négative), or $W(\alpha) = -f'(\alpha)g(\alpha) < 0$ et $W(\beta) = -f'(\beta)g(\beta) > 0$, ce qui est absurde : g s'annule nécessairement.

B.3

a Supposons $q \geqslant 1$. On applique le résultat précédent pour p constante de valeur 1 : les solutions de $\mathcal{E}_p$ sont les $x \mapsto A\cos(t - t_0)$, où A et t_0 décrivent $\mathbb{R}$. Pour tout segment $[\alpha, \beta]$ de longueur π, on peut donc trouver une solution de $\mathcal{E}_p$ comme en B.2, à savoir $t \mapsto \sin(t - \alpha)$, prouvant ainsi que g s'annule nécessairement sur ce segment.

b Supposons que $q \leqslant 1$, que g soit non nulle, et que pourtant g s'annule au moins deux fois sur un segment $[\alpha, \beta]$ de longueur strictement inférieure à π. Quitte à réduire ce segment, on peut supposer que g s'annule en α et β, et qu'elle ne s'annule pas entre ces deux points.

D'après B.2, en échangeant les rôles de f et de g (et de p et de q), toute solution de $y'' + y = 0$ devrait s'annuler sur $[\alpha, \beta]$, de qui est faux pour $t \mapsto \cos\left(t - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$: g s'annule au plus une fois sur $[\alpha, \beta]$.

Partie C – L'équation de Bessel

C.1 g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car f et la fonction racine carrée le sont. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(x) = f'(x)\sqrt{x} + \frac{f(x)}{2\sqrt{x}},$$

et

$$g''(x) = f''(x)\sqrt{x} + \frac{f'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{f(x)}{4x^{3/2}},$$

donc

$$\begin{aligned} g''(x) + \left(1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{4x^2}\right) g(x) &= f''(x)\sqrt{x} + \frac{f'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{f(x)}{4x^{3/2}} + \left(1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{4x^2}\right) f(x)\sqrt{x} \\ &= \sqrt{x}\left(f''(x) + \frac{f'(x)}{x} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right) f(x)\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat demandé.

C.2 Bien sûr, f et g ont le même lieu d'annulation. On peut appliquer les résultats de B.3 à g, où $q(x) = \left(1 - \frac{4\lambda^2-1}{4x^2}\right)$: si $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$, alors $q \leqslant 1$, donc g (et, partant f) s'annule au pluss une fois sur un segment de longueur π. Si $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$, alors $q \geqslant 1$, donc g (et, partant f) s'annule au moins une fois sur un segment de longueur strictement inférieure à π.