Devoir non surveillé

Résolution d'une équation du troisième degré

1 On considère l'équation à coefficients réels (e) : $x^3+ax^2+bx+c=0$, et on note $P(X)=X^3+aX^2+bX+c$.

a Trouver un réel α dépendant de a,b,c, tel que le coefficient du terme de degré deux du polynôme $Q(X)=P(X+\alpha)$ soit nul.

b On note alors $Q(X)=X^3+pX+q$. Exprimer p et q en fonction de a,b,c.

2

a Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur p et q pour que le polynôme Q possède dans $\mathbb{C}$ une racine ω au moins double, *i.e.* telle que $Q(\omega)=Q'(\omega)=0$.

b Résoudre l'équation (e') : $Q(x)=0$ dans ce cas.

3 On suppose que la condition trouvée en 2.a n'est pas vérifiée et on veut résoudre l'équation (e').

a Montrer que tout complexe x peut se mettre sous la forme $x=u+v$ où u et v sont des complexes vérifiant la condition $3uv+p=0$.

b Montrer que si x est solution de (e'), u^3 et v^3 sont les racines z_1 et z_2 d'une équation du second degré que l'on formera.

c En déduire les solutions de (e') en distinguant les cas $4p^3+27q^2>0$ et $4p^3+27q^2<0$.

d Dans quel cas les racines sont-elles toutes réelles ? Comparer avec l'étude des variations de Q.

4 Application : résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^3-3x^2-3x-1=0$.