Corrigé de devoir non surveillé

Résolution d'une équation du troisième degré

1

a Soit α un réel, $Q = P(X + \alpha)$. On a :

$$Q(X) = X^3 + X^2(3\alpha + a) + X\left(3\alpha^2 + 2a\alpha + b\right) + \alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c,$$

donc $\boxed{\text{le choix } \alpha = -\frac{a}{3} \text{ convient}}$ (et c'est le seul).

b Par simple calcul, on trouve :

$$\boxed{p = b - \frac{a^2}{3} \qquad \text{et} \qquad q = 2\frac{a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.}$$

2

a Soit ω un nombre complexe. ω est racine au moins double de Q si et seulement si $Q(\omega) = Q'(\omega) = 0$, soit

$$\begin{cases} 3\omega^2 + p = 0 \\ \omega^3 + \omega p + q = 0 \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} p = -3\omega^2 \\ q = 2\omega^3 \end{cases},$$

soit enfin

$$\begin{cases} 4p^3 + 27q^2 = 0 \\ \omega^2 = -p/3 \\ \omega^3 = q/2 \end{cases}$$

Une condition nécessaire est donc $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Supposons, réciproquement, que $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Les racines carrées de $-p/3$ sont les racines sixièmes réelles de $(-p/3)^3 (= (q/2)^2)$, donc $\omega = \sqrt[3]{q/2}$ est l'une d'entre elles. Pour cette valeur de ω, on a bien $\omega^2 = -p/3$ et $\omega^3 = q/2$.

Par conséquent, Q possède au moins une racine double si et seulement si $\boxed{4p^3 + 27q^2 = 0.}$

b On a vu que, dans ce cas, $\omega = \sqrt[3]{q/2}$ était une racine au moins double de Q.

En considérant le terme de degré 2 dans Q, on constate que la somme de ses racines est nulle, et donc les solutions de Q sont $\sqrt[3]{q/2}$ et $-2\sqrt[3]{q/2}$.

3

a Raisonnons par analyse-synthèse[1].

Analyse : supposons que : $x = u + v$ avec u, v complexes tels que : $3uv + p = 0$. Dans ce cas, u et v sont solutions de l'équation : $z^2 - xz - \frac{p}{3} = 0$.

Synthèse : réciproquement, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, l'équation $z^2 - xz - \frac{p}{3} = 0$ admet deux solutions complexes u et v, telles que : $u + v = x$ et $uv = -\frac{p}{3}$.

Un tel couple (u, v) existe donc bien.

b Supposons que $x^3 = -px - q$. On obtient, en remplaçant x par $u + v$, que :

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0,$$

donc que $u^3 + v^3 = -q$ (puisque $3uv + p = 0$). Or $u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$ (pour la même raison), donc u^3 et v^3 sont les solutions z_1 et z_2 de l'équation :

$$(\star) \quad : \quad z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

1. même si ici, seule la synthèse importe

c Le discriminant de cette équation vaut : $\Delta = \dfrac{1}{27}\left(4p^3+27q^2\right)$.

Premier cas : $4p^3+27q^2>0$. L'équation $\star$ admet deux racines réelles $z_1 = \dfrac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}$. Comme $uv = -\dfrac{p}{3}$ est réel, on en déduit que les solutions de (e') (qui sont au nombre de trois) sont, en notant $\alpha = \sqrt[3]{z_1}$ et $\beta = \sqrt[3]{z_2}$:

$$\boxed{\alpha+\beta, \alpha j+\beta j^2, \alpha j^2+\beta j.}$$

Second cas : $4p^3+27q^2<0$. L'équation $\star$ admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-q+i\sqrt{-\Delta}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-q-i\sqrt{-\Delta}}{2}$. Écrivons z_1 sous forme trigonométrique : $z_1 = |z_1|e^{i\varphi}$.

Comme uv est réel, les solutions de (e') sont, en notant $\alpha = \sqrt[3]{|z_1|}e^{i\varphi/3}$ et $\beta = \sqrt[3]{|z_1|}e^{-i\varphi/3} = \bar{\alpha}$:

$$\boxed{\alpha+\beta, \alpha j+\beta j^2, \alpha j^2+\beta j.}$$

d Les racines sont toutes réelles dans le dernier cas puisque $\beta = \overline{\alpha}$. Elles ne le sont pas dans le premier cas (si elles l'étaient, alors $\alpha j+\beta j^2$ serait racine au moins double, puisque égale à $\alpha j^2+\beta j$).

$\boxed{\text{Les racines sont toutes réelles si et seulement si } 4p^3+27q^2<0.}$

Une étude élémentaire de la fonction $x \mapsto Q(x)$ permet de constater que Q admet trois racines réelles distinctes si et seulement si ($p<0$ et) $Q(-\sqrt{-p/3})Q(\sqrt{-p/3})<0$, soit

$$\left(\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} - \sqrt{-\frac{p}{3}}p+q\right)\left(-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + \sqrt{-\frac{p}{3}}p+q\right)<0,$$

soit encore

$$\left(-2\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q\right)\left(2\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q\right)<0,$$

soit enfin [2]

$$\boxed{4p^3+27q^2<0.}$$

On retrouve bien la seconde situation.

4 Dans ce cas particulier, et en conservant les notations précédentes, $a=-3$, $b=-3$, $c=-1$, $\alpha=1$, $p=-6$, $q=-6$.

L'équation (e') s'écrit $x^3-6x-6=0$. On a $4p^3+27q^2>0$, $z_1=4$ et $z_2=2$.

Les racines de (e') sont donc $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}j+\sqrt[3]{2}j^2$, $\sqrt[3]{4}j^2+\sqrt[3]{2}j$, et celles de (e) sont :

$$\boxed{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}, 1+\sqrt[3]{4}j+\sqrt[3]{2}j^2, 1+\sqrt[3]{4}j^2+\sqrt[3]{2}j.}$$

2. Si $4p^3+27q^2<0$, alors $p<0$