Corrigé de devoir non surveillé

Équations différentielles

Exercice 1 : Ordre 1

L'équation homogène associée à $\mathcal{E}$ admet pour solution générale $x \mapsto Ce^{\arctan(x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, où C parcourt $\mathbb{R}$.

Pour déterminer une solution particulière de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (si on n'en trouve pas d'« évidente »), on utilise la méthode de variation de la constante, en la cherchant sous la forme $\phi\ : x \mapsto C(x)e^{\arctan(x)}$, pour une certaine fonction dérivable C. Pour tout $x > 0$,

$$\phi'(x) = \left(C'(x) + \frac{C(x)}{1+x^2}\right)e^{\arctan(x)},$$

donc ϕ est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si, pour tout $x > 0$,

$$(1+x^2)C'(x)e^{\arctan(x)} = (1+x^2)e^{-\arctan(1/x)},$$

soit encore $C'(x) = e^{-\frac{\pi}{2}}$, grâce à la relation $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$ (valable car $x > 0$).

On peut donc prendre $\phi : x \mapsto xe^{-\frac{\pi}{2}+\arctan(x)}$, *i.e.* $\phi : x \mapsto xe^{-\arctan(1/x)}$.

La solution générale de $\mathcal{E}$ est donc :

$$x \mapsto (\lambda + xe^{-\frac{\pi}{2}})e^{\arctan(x)},$$

ou encore

$$\boxed{x \mapsto \lambda e^{\arctan(x)} + xe^{-\arctan(1/x)},}$$

où λ parcourt $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Un problème de Cauchy pour l'ordre 2

Observons déjà que d'après le cours, ce problème de Cauchy admet une unique solution.

L'équation différentielle $(\mathcal{E})\ :\quad y'' + (1+m)y' + my = 2me^{mx}$ est d'équation caractéristique

$$z^2 + (1+m)z + m = 0,$$

de solutions -1 et $-m$ (donc admet une unique solution si et seulement si $m = 1$).

m est donc solution de l'équation caractéristique si et seulement si $m \in \{-1, 0\}$.

- Si $m = 0$, alors $\boxed{\text{la fonction nulle}}$ est solution évidente (et c'est la seule car le problème est de Cauchy).
- Si $m = -1$, alors $\mathcal{E}$ admet une solution de la forme $f : x \mapsto \lambda xe^{-x}$, pour un certain réel λ. On trouve par identification $\lambda = 1$. La solution au problème de Cauchy considéré est de la forme

  $$\phi : x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-x} + xe^{-x},$$

  pour certains réels α et β. Les conditions $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) = 0$ donnent $\alpha = -1/2$ et $\beta = 1/2$. La solution à $\mathcal{C}$ est donc

  $$\boxed{\phi : x \mapsto xe^{-x} - \operatorname{sh}(x).}$$

- Si $m \notin \{0, -1\}$, alors $\mathcal{E}$ admet une solution particulière de la forme

  $$x \mapsto \lambda e^{mx},$$

  pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Par identification, on trouve $\lambda = 1/(m+1)$.

– Supposons $m \neq 1$. Soit $\phi : x \mapsto \frac{1}{(m+1)} e^{mx} + \alpha e^{-x} + \beta e^{-mx}$ la solution de $\mathcal{C}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.
Les conditions $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) = 0$ s'écrivent

$$\frac{1}{m+1} + \alpha + \beta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{m}{m+1} - \alpha - m\beta = 0.$$

On trouve donc $\alpha = 2m/(1-m^2)$ et $\beta = 1/(m-1)$.

L'unique solution au problème de Cauchy considéré est donc :

$$\boxed{\phi : x \mapsto \frac{1}{m+1} e^{mx} + \frac{2m}{1-m^2} e^{-x} + \frac{1}{m-1} e^{-mx}.}$$

– Supposons $m = 1$. Soit $\phi : x \mapsto \frac{1}{2} e^{x} + (\alpha x + \beta) e^{-x}$ la solution de $\mathcal{C}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.
Les conditions $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) = 0$ s'écrivent

$$\frac{1}{2} + \beta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} + \alpha - \beta = 0.$$

On trouve donc $\beta = -1/2$ et $\alpha = -1$.

L'unique solution au problème de Cauchy considéré est donc :

$$\boxed{\phi \ : x \mapsto \operatorname{sh}(x) - x e^{-x}.}$$