Devoir non surveillé

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 1 : Un classique

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1 Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$.

2 Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

Exercice 2 : Projecteurs de $\mathcal{L}(E)$

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur, sur F parallèlement à G. On pose $q = \mathrm{Id}_E - p$.

1 Vérifier que q est un projecteur, dont on donnera (sans démonstration) image et noyau en fonction de ceux de p.

2 On définit les parties $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ suivantes de $\mathcal{L}(E)$:

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{L}(E), \exists u \in \mathcal{L}(E), f = u \circ p\} \quad \text{et} \quad \mathcal{G} = \{f \in \mathcal{L}(E), \exists u \in \mathcal{L}(E), f = u \circ q\}$$

Montrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.

3 Montrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 3 : Théorème de Maschke

1 Soit f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que g laisse stables $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ (*i.e.* $g(\mathrm{Im}(f)) \subset \mathrm{Im}(f)$ et $g(\mathrm{Ker}(f)) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par tout élément g de G (*i.e.* $g(F) \subset F$). On suppose disposer d'un projecteur q de E sur F. On souhaite montrer que F admet un supplémentaire H stable par tout élément de G (théorème de Maschke). Pour ce faire, on pose

$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ q \circ g^{-1}.$$

2 Montrer que p est un endomorphisme d'image incluse dans F, puis que c'est un projecteur d'image F.

3 Soit $g_0 \in G$. Montrer que $p \circ g_0 = g_0 \circ p$.

Conclure.