Devoir non surveillé

Problème – Familles positivements génératrices

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille de vecteurs de E ($p\in\mathbb{N}^*$).

La famille $(x_1,\dots,x_p)$ de vecteurs de E est dite *positivement génératrice* si, pour tout $x\in E$, il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in(\mathbb{R}_+^*)^p$ tel que

$$(*)\quad x=\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i.$$

On dit que $(x_1,\dots,x_p)$ est *positivement liée* s'il existe une relation de liaison

$$(**)\quad \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0$$

des vecteurs de cette famille, telle que tous les scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ soient strictement positifs.

Le *dual* E^* de E est l'espace $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ des formes linéaires sur E.

I.1 Montrer que $(x_1,\dots,x_p)$ est positivement génératrice si et seulement si $(x_1,\dots,x_p)$ est génératrice et positivement liée.

Désormais, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, et E^* est son dual $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$.

I.2 Montrer que l'application

$$\varphi :\begin{array}{ccc} E & \to & E^* \\ a & \mapsto & (b\mapsto (a|b)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On considère une famille $(f_1,\dots,f_p)$ de vecteurs de E^*. On souhaite montrer (partiellement) l'équivalence des deux assertions suivantes :

1. $\forall\, x\in E\setminus\{0\},\quad \min\limits_{1\leqslant i\leqslant p} f_i(x)<0.$
2. $(f_1,\dots,f_p)$ est positivement génératrice.

Grâce à φ, on peut considérer la famille $(a_1,\dots,a_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $\varphi(a_i)=f_i$, soit, pour tout $b\in\mathbb{R}^3$:

$$f_i(b)=(a_i|b).$$

La condition i. signifie donc que pour tout vecteur non nul b de $\mathbb{R}^3$, il existe un $i\in[\![1,p]\!]$ tel que $(a_i|b)<0$.

I.3 Montrer l'implication ii.$\Rightarrow$i.

I.4 On étudie le sens direct : on suppose i. satisfaite.

a Montrer que $(a_1,\dots,a_p)$ est génératrice.

On suppose dorénavant que $p=4$.

b Montrer que toutes les sous-familles strictes de $(a_1,\dots,a_4)$ sont libres.

c Notons $\mathcal{C}$ l'enveloppe convexe de $\{a_1,\dots,a_4\}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{C}=\left\{y\in E,\ \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_4)\in\mathbb{R}_+^4, (\sum_{i=1}^4\lambda_i=1)\wedge(y=\sum_{i=1}^4\lambda_i a_i)\right\}.$$

On admet l'existence de $c\in\mathcal{C}$ tel que $\|c\|=\inf\{\|x\|\,, x\in\mathcal{C}\}$.

Montrer que pour tout $i\in[\![1,4]\!]$, $(a_i|c)\geqslant 0$, puis en déduire que $c=0$.

Indication : on pourra considérer $\frac{1}{1-\lambda}\left(\|\lambda c+(1-\lambda)a_i\|^2-\|c\|^2\right)$, où $\lambda\in[0,1[$, et faire tendre λ vers 1.

d Montrer que $(a_1,\dots,a_4)$ est positivement liée, et conclure.