Corrigé de devoir non surveillé

Problème – Familles positivements génératrices

I.1 Supposons $(x_1, \ldots, x_p)$ positivement génératrice : cette famille est clairement génératrice par hypothèse, et positivement liée en prenant $x = 0_E$ dans $(*)$.

Si, réciproquement, $(x_1, \ldots, x_p)$ est génératrice et positivement liée, alors il existe des réels strictement positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0_E.$$

Soit $x \in E$, $\beta_1, \ldots, \beta_p$ des réels tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i x_i = x.$$

On a, pour tout réel t :

$$x = \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i t + \beta_i) x_i.$$

En prenant t suffisamment grand (plus précisément $t > \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} -\beta_i/\alpha_i$), on constate que $(x_1, \ldots, x_p)$ est positivement génératrice.

I.2 Déjà, pour tout $a \in E$, $b \mapsto (a|b)$ est bien un élément de E^*, par linéarité à droite du produit scalaire, donc φ est bien définie.

La linéarité de φ résulte de la linéarité à gauche du produit scalaire : en effet, soit $a, a', b \in E$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(\lambda a + \lambda' a')(b) = (\lambda a + \lambda' a' | b) = \lambda (a|b) + \lambda' (a'|b) = (\lambda \varphi(a) + \lambda' \varphi(a'))(b).$$

Ceci valant pour tout $b \in E$, $\varphi(\lambda a + \lambda' a') = \lambda \varphi(a) + \lambda' \varphi(a')$.

Soit $a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. En particulier, $\varphi(a)(a) = 0$, *i.e.* $\|a\| = 0$, donc $a = 0$: φ est injective.

Enfin, soit $f \in E^*$. Pour tout $b = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a, en posant $\alpha = f(1, 0, 0)$, $\beta = f(0, 1, 0)$ et $\gamma = f(0, 0, 1)$:

$$f(b) = f(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) = \alpha x + \beta y + \gamma z = (a|b),$$

où $a = (\alpha, \beta, \gamma)$, donc $f = \varphi(a)$: f est bien surjective.

I.3 Supposons ii. : soit $x \in E \setminus \{0\}$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des réels strictement positifs tels que $\varphi(-x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$. En évaluant cette relation en x, il vient

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x) = - \|x\|^2 < 0.$$

Il existe donc $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $\lambda_i f_i(x) < 0$, *i.e.* $f_i(x) < 0$ (puisque $\lambda_i > 0$), d'où le résultat demandé.

I.4

a Supposons $(a_1, \ldots, a_p)$ non génératrice, c'est-à-dire $a_1, \ldots, a_p$ coplanaires. Il existe alors un vecteur non nul b, orthogonal à chacun de ces vecteurs, et donc tel que $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} f_i(b) = 0$, ce qui contredit i. : $(a_1, \ldots, a_p)$ est génératrice. En appliquant φ, on en déduit que $(f_1, \ldots, f_p)$ est également génératrice.

b Si (a_1, a_2, a_3) était liée, en prenant un vecteur non nul u orthogonal à a_1, a_2 et a_3, on pose $b = u$ si $(u|a_4) \geqslant 0$, $b = -u$ sinon, de sorte que $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} f_i(b) = 0$, ce qui contredit à nouveau i. : (a_1, a_2, a_3) est libre, de même pour les autres sous-familles de cardinal 3. Les autres sous-familles strictes de $(a_1, \ldots, a_4)$ étant des sous-familles de l'une de ces familles, elles sont également libres.

c

Soit $\lambda \in [0,1[$. On a

$$\frac{1}{1-\lambda}\left(\|\lambda c+(1-\lambda)a_i\|^2-\|c\|^2\right)=\frac{1}{1-\lambda}\left(\lambda c+(1-\lambda)a_i-c|\lambda c+(1-\lambda)u_i+c\right)=(a_i-c|(1+\lambda)c+(1-\lambda)a_i).$$

Par ailleurs, par définition de c, cette quantité est positive pour tout λ, de sorte qu'en faisant tendre λ vers 1 :

$$(a_i-c|2c)\geqslant 0, \quad i.e. \quad (a_i|c)\geqslant \|c\|^2.$$

Ainsi, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $(a_i|c)\geqslant 0$, puis $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant p} f_i(c)\geqslant 0$. Par hypothèse i., $0_E\in\mathcal{C}$.

d Comme $0_E\in\mathcal{C}$, il existe des réels positifs $\lambda_1,\ldots,\lambda_4$ (et de somme 1) tels que

$$0_E=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i a_i.$$

D'après I.4.b, ces scalaires sont tous non nuls, donc $(a_1,\ldots,a_4)$ est positivement liée puis, en appliquant φ, $(f_1,\ldots,f_4)$ également.

D'après I.4.a cette famille est également génératrice, et d'après I.1, elle est donc positivement génératrice.